福井大学 工学部
物理工学科１年生

微分積分演習 I　　最終レポート課題

提出期限：2005 年 8 月 9 日 (火) 12:00
提出方法：

以下の【１】か【２】のどちらか１題を選択して答えよ。解答には A4 サイズの用紙を用い、複数枚にわたる場合は上辺をステープラーなどで綴じてから提出せよ。解答用紙の最初に、学籍番号・氏名・選択した問題の番号を明記せよ。

【１】(1) 以下の式（オイラーの式と呼ばれる）を証明せよ。

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

(2) 以下の式（マチンの式と呼ばれる）を証明せよ。

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

(3) $\arctan x$ の $x=0$ の近傍でのテーラー展開式に $x=\frac{1}{2}$ および $x=\frac{1}{3}$ を代入すると、

$$\arctan\tfrac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad a_n = (-1)^n \tfrac{1}{2n+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\arctan\tfrac{1}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \qquad b_n = (-1)^n \tfrac{1}{2n+1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

が得られる。これらとオイラーの式を組み合わせると

$$\tfrac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} S_n, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)$$

として円周率 π の値を求めることができる。以下のような表を作ると、a_n は $n \le 7$ の項まで、b_n は $n \le 4$ の項まで計算すれば 10^{-6} 程度の精度で $\pi/4$ の値を計算できることがわかる。

n	a_n	b_n	S_n
0	0.5000000	0.3333333	0.8333333
1	−0.0416667	−0.0123457	0.7793210
2	0.0062500	0.0008230	0.7863940
3	−0.0011161	−0.0000653	0.7852126
4	0.0002170	0.0000056	0.7854353
5	−0.0000444	−0.0000005	0.7853904
6	0.0000094	0.0000000	0.7853998
7	−0.0000020	0.0000000	0.7853978
8	0.0000004	0.0000000	0.7853982

マチンの式を用いて、同様な表を作成し、$\pi/4$ の値を誤差 10^{-6} 以内で求めるのに、テーラー展開の何番目の項まで計算する必要があるか調べよ。計算機を使用してよい。

【2】2 変数関数 $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^3 - 3y + \alpha x^2 y$ について以下の問に答よ。

(1) $\alpha = 0$ の場合に $z = f(x,y)$ の極大値、極小値、および各々の極値をとる点の座標 (x,y) をもれなく求めよ。

(2) α が非常に小さい正の値をとる場合は、$\alpha = 0$ のときと較べて、(1) で求めた各々の極値の位置 (x,y) はどちら方向へずれるかを考察せよ。答え方は「x が増加し、y が減少する」のようなおおまかな表現でよい。

【微積演習 I 最終レポート 1】の (3) の解答

JABEE 審査資料中、この部分だけ手書きでないのでここに転載する。

arctan x の $x=0$ の近傍でのテーラー展開式は

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -1 \\ n \end{pmatrix} \left(t^2\right)^n dt \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

である。この展開式に $x=\frac{1}{5}$ および $x=\frac{1}{239}$ を代入すると、

$$\arctan\tfrac{1}{5} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad c_n = (-1)^n \tfrac{1}{2n+1}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2n+1}$$

$$\arctan\tfrac{1}{239} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n, \qquad d_n = (-1)^n \tfrac{1}{2n+1}\left(\tfrac{1}{239}\right)^{2n+1}$$

が得られる。これらとマチンの式を組み合わせると

$$\frac{\pi}{4} = 4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} d_k = \lim_{n\to\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n}(4c_k - d_k)$$

として $\frac{\pi}{4}$ の値 $(= 0.78539816\cdots)$ を求めることができる。以下の表は小さい n の値に対して、c_n, $4c_n$, d_n, S_n の値を数値的に計算したものである。この表を見ると、、c_n は $n \leq 3$ の項まで、d_n は $n \leq 0$ の項まで計算すれば 10^{-6} 程度の精度で $\frac{\pi}{4}$ の値を計算できることがわかる。

n	c_n	$4c_n$	d_n	S_n
0	0.2000000	0.8000000	0.0041841	0.7958159
1	−0.0026667	−0.0106667	0.0000000	0.7851493
2	0.0000640	0.0002560	0.0000000	0.7854053
3	−0.0000018	−0.0000073	0.0000000	0.7853979
4	0.0000001	0.0000002	0.0000000	0.7853982
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.7853982

数学の答案としては、n 階導関数の具体的な形を漸化式を利用するなどして求めて、Taylor の定理の与える誤差の上限を正確に評価するのが正しいとは思うが、数学専攻以外の学生を対象とする数学の授業としては、道具としての微分積分の切れ味の良さを納得してもらい学生の心 (知識・理解) の深いところに長く残すことが第一に大切で、そのためには、この解答例のような簡単な (コストパフォーマンスのよい) 答が適切と私は思うのである。