福井大学工学部物理工学科１年生対象授業

微分積分演習 I

2011 年度前期 配布資料　　(担当教員 田嶋直樹)

No.1：初等関数の性質 (三角関数、指数関数、双曲線関数)

No.2：初等関数の性質 (対数関数、逆三角関数)

No.3：初等関数の性質 (逆三角関数の練習問題、逆双曲線関数)、一変数関数の微分

No.4：基本関数の微分、合成関数の微分

No.5：x^x の微分

No.6：高階微分、関数の積の高階微分

No.7：テーラー展開、基本関数のテーラー展開

No.8：テーラー展開式の操作

No.9：ロピタルの定理、偏微分

No.10：(仮称) 全微分の公式、(仮称) 偏微分の変数変換の公式

【注】 演習という形態の授業で今後も使用し続ける予定のため、問題の解答は公開しておりません。

微分積分演習 I No.1 【 初等関数の性質 1】

sin と cos

sine (正弦), cosine (余弦)
三角関数 : trigonometric function

● 周期 2π をもつ: $\pi = 3.14\cdots$: 円周率

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対して

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x$$

● 偶奇性 : parity

$\sin(-x) = -\sin x$: 奇 (odd) 関数
$\cos(-x) = \cos x$: 偶 (even) 関数

【問 1】 以下の関数のグラフを描け
1. $\sin 2x$ 2. $\sin\frac{x}{2}$ 3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

● sin と cos の関係
ピタゴラス (Pythagoras) の定理 (三平方の定理) より

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

● 三角関数の加法定理 (addition formulas)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

【問 2】三平方の定理を証明せよ。易しいと思った人は、加法定理の幾何学的な証明にも挑戦してみよ。頭の体操のため、座標の概念を導入せず、三角比の定義と三角形の相似関係だけを用いて示してみよう。

【問 3】 加法定理から半角公式、倍角公式、積を和になおす公式、和を積になおす公式、(後述の) tan の加法定理、を導け。

【問 4】 $y = \sin^2 x$ と $y = \cos^2 x$ のグラフを描け。

【問 5】 $\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx$ と $\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx$ の値を求めよ。

【問 6】 積→和の公式を駆使して左辺を変形し右辺を導け
1) $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$
2) $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$
$\cos^3 x$, $\cos^4 x$ についても同様の変形をしてみよ。

その他の三角関数

タンジェント (tangent) (正接) : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

コタンジェント (cotangent) (余接) : $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$

セカント (secant) (正割) : $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

コセカント (cosecant) (余割) : $\mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$

【注意】 “co” のつけ方の規則性は？

【問 7】 関数 $\tan x$、$\cot x$、$\mathrm{cosec} x$、$\sec x$ のグラフを描け。

e^x

指数関数 : exponential function
$2^{\mathbf{3}} = 8$ の **3** が指数 (exponent)

$$y = e^x \quad :「イーの\ x\ 乗」$$
$$= \exp x \quad :「イクスポーネンシャル\ x」$$

$e = 2.718\cdots$: 自然対数の底

【問 8】 $y = \exp(-x)$ のグラフを描け。

双曲線関数

hyperbolic function

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: ハイパボリックサイン x
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: ハイパボリックコサイン x
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: ハイパボリックタンジェント x

【読み方】 ハイパボリック (双曲線の) をハイパー (超) と縮めて言うのは避けたい。しかし長い名称は思考の妨げなので、cosh を “コッシュ”、sinh を “シン (チ)” などと発音する人もいる。

【注意】 $(\sinh x)^n$ を $\sinh^n x$ と書く。

【問 9】 関数 $\sinh x$、$\cosh x$、$\tanh x$ のグラフを描け。偶関数か奇関数か? $x = 0$ での値と接線の傾きは?

● sinh と cosh の関係 三角関数との相違は？

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

● 双曲線関数の加法定理 三角関数との相違は？

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$
$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$$

【問 10】上の 3 式 ($\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\sinh(\alpha \pm \beta) = \cdots$, $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cdots$) を導け。

 【初等関数の性質 2】

$\boxed{\log x}$

対数関数 (logarithmic function) は
指数関数の逆関数として定義される

$$\begin{aligned} y &= \quad e^x \qquad (-\infty < x < \infty,\ y > 0) \\ x &= \quad \log y \quad (y > 0,\ -\infty < x < \infty) \end{aligned}$$

[基本公式] 一般に, 関数 f とその逆関数 f^{-1} との間には
恒等式 $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ が成り立つので

$e^{\log\, x} = x\ (x > 0), \quad \log e^x = x\ (-\infty < x < \infty)$

一般の指数・対数関数

底 (base) が $a(> 0)$ の指数・対数関数：

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

● よく使われる底の値

底	名称	略記法
e	自然対数	$\log x$, $\ln x$
10	常用対数	$\log x$

【読み方】 ln はナチュラルログ, エルエヌ, “ローン”, $\cdots$
数学の授業では $\log\ x$ も $\ln x$ も $\log_e x$ だと考えよ.

● 対数関数の性質　　$a, b, c, x, y > 0$ として

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^y &= y \log_a x \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

【問 1】 上の 3 式を「指数の法則」
$a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$ から導け.

【問 2】 下式の値を求めよ. $(a > 0, b > 0)$

1. $\log_a 1$　　2. $\log_a a$　　3. $\log_a \frac{1}{a}$
4. $\log_{1/a} b$ を $\log_a b$ で表せ
5. $\log_b a$ を $\log_a b$ で表せ
6. $\log_{\sqrt{a}} b$ を $\log_a b$ で表せ
7. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$ を $\log_a b$ で表せ
8. $\log_2 8$　　9. $\log_8 16$　　10. $\log_{\sqrt{27}} 81$

● 任意の底をもつ指数・対数関数は, e を底とする指数・対数関数であらわせる

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x \log_e a} \\ \log_a x &= \frac{\log_e x}{\log_e a} \end{aligned}$$

逆三角関数　inverse trigonometric functions

微積 II の積分で必要となる

$$\begin{aligned} x = \arcsin y \quad &\Leftrightarrow \quad y = \sin x \ \left(-\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2}, -1 \le y \le 1\right) \\ x = \arccos y \quad &\Leftrightarrow \quad y = \cos x \ \left(0 \le x \le \pi, -1 \le y \le 1\right) \\ x = \arctan y \quad &\Leftrightarrow \quad y = \tan x \ \left(-\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty\right) \end{aligned}$$

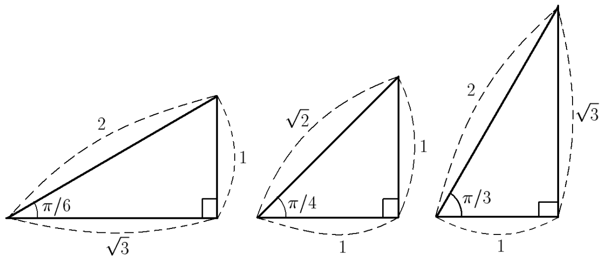
【読み方】アークサイン, アークコサイン, アークタンジェント

【注意】$\sin^{-1} y$ や $\mathrm{Sin}^{-1} y$ は $\frac{1}{\sin y}$ とまぎらわしいので, $\arcsin y$ と書くことを勧める. arc は円弧の意味.

【注意】一価関数にするために, 定義域と値域に制限が加えられている. 式の変形をするときは, この制限に注意を払うことが大切. ($\rightarrow$ Sin と sin の違い)

● 直角三角形との関係

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\pi}{4} &= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan\ 1 \\ \frac{\pi}{3} &= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos \frac{1}{2} = \arctan \sqrt{3} \end{aligned}$$



● 逆三角関数に関する問題

逆三角関数の問題は, 三角関数の世界で熟知している関係 (加法定理など) を, 逆三角関数を用いた関係に翻訳することで解ける. 三角関数の基本が身についていれば, あとは頭の体操に過ぎないので, 解けるはずと信じて取り組んで下さい.

【問 3】 以下の値を求めよ.

1. $\arcsin \dfrac{1}{2}$　　2. $\arcsin \left(-\dfrac{1}{2}\right)$
3. $\arccos \dfrac{1}{2}$　　4. $\arccos \left(-\dfrac{1}{2}\right)$
5. $\arctan 1$　　6. $\arctan(-1)$
7. $\sin\left(\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　8. $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

微分積分演習 I No.3

- 逆三角関数に関する追加問題

【問 1】 $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$ の値を求めよ。

【問 2】 $\cos\left(\arctan\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

【問 3】 $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{10}\right)$ の値を求めよ。

【問 4】 $\arcsin x = \arctan 2$ を満たす x を求めよ。

【問 5】 $\arccos x = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ を満たす x を求めよ。

【問 6】 $\arctan x = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ を満たす x を求めよ。

【問 7】 $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3} - \arcsin\dfrac{1}{4}\right)$ の値を求めよ。

【問 8】 $\arcsin\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3} = \arcsin x$ を満たす x を求めよ。ただし左辺の値が $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に入っていることはあらかじめ分っているものとせよ。

【問 9】 $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$ の値を求めよ。

【問 10】 $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}} + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ の値を求めよ。

【問 11】 $\sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$ の値を求めよ。

【問 12】 $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{6}\right)$ の値を求めよ。

以下は自習用の基礎的な問題です。

【問 13】 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ (答. $\frac{\pi}{3}$)

【問 14】 $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (答. $-\frac{\pi}{3}$)

【問 15】 $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ (答. $\frac{\pi}{4}$)

【問 16】 $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (答. $\frac{3}{4}\pi$)

【問 17】 $\arctan\sqrt{3}$ (答. $\frac{\pi}{3}$)

【問 18】 $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$ (答. $-\frac{\pi}{3}$)

【問 19】 $\sin\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ (答. $-\frac{3}{5}$)

【問 20】 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ (答. $\frac{\sqrt{5}}{3}$)

【問 21】 $\tan\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)$ (答. $-\frac{2}{3}$)

【問 22】 $\arccos\frac{3}{5} - \arccos\frac{4}{5} = \arccos x$ (答. $x = \frac{24}{25}$)

関数電卓でも逆三角関数が使えることが必要です．答を電卓でチェックしてみよう！

逆双曲線関数

$$
\begin{aligned}
y = \sinh x &\iff x = \operatorname{arcsinh} y \\
y = \cosh x &\iff x = \operatorname{arccosh} y \quad (2\text{ 枝}) \\
y = \tanh x &\iff x = \operatorname{arctanh} y
\end{aligned}
$$

log を用いて表せる:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ -\infty < x < \infty \\
\operatorname{arccosh} x &= \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)\ (2\text{ 枝}),\ x \geq 1 \\
&= \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
\operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\ -1 < x < 1
\end{aligned}
$$

【問 23】 関数 $\operatorname{arcsinh} x$、$\operatorname{arccosh} x$、$\operatorname{arctanh} x$ のグラフを描け。

【問 24】 上の 3 式を導出せよ（逆関数を求めることの恰好の練習問題です。）

【一変数関数の微分】

differential:微分 (の), differentiation:微分 (すること), derivative:導関数

- 定義 (ひき算して、わり算 (スカラー倍) して、極限をとる)

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 公式

1. 和の微分公式 $(f+g)' = f' + g'$
2. 積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$
   $\Rightarrow (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
   $\Rightarrow (f_1f_2f_3f_4)' = \boxed{\qquad + \qquad + \qquad + \qquad}$
3. 商の微分公式 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
4. 合成関数の微分公式 (chain rule)
   $$\frac{df\,(g\,(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$
   又は $(f\,(g\,(x)))' = f'\,(g\,(x))\,g'\,(x)$
5. 逆関数の微分公式
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{又は} \quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

【注】公式 3 は 公式 2 と 公式 4 から導ける。
($f(x)/g(x) = f(x)h(g(x)), h(y) = \frac{1}{y}$ と見る)

微分積分演習 I No.4

【 基本関数の微分】derivatives of basic functions

- 基本関数とその逆関数の微分

1.★ $(x^s)' = sx^{s-1}$

2.★ $(e^x)' = e^x$

3.☆ $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ 　又は　 $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

4.★ $(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$

5. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

6.☆ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8.☆ $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

9. $(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x$

10. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}\ , \qquad (\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

11. $(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

12. $(\operatorname{arccosh} x)' = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 　(2 枝)

13. $(\operatorname{arctanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

★を付けた 3 つの式が基本。式 9 は双曲線関数の定義および 式 2 から導びける。その他の式は ★を付けた 3 つの式と 式 9 から導ける。★3 式と☆3 式は是非暗記してください。

関数の商の微分公式 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ を利用して問 1,2 に答えよ。

【問 1】 式 4 から 式 5 を導け。　(参考) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

【問 2】 式 9 から 式 10 を導け。　(参考) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

逆関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ を利用して問 3〜7 に答えよ。

【問 3】 式 2 から 式 3 を導け。

【問 4】 式 4 から 式 6・式 7 を導け。

【問 5】 式 5 から 式 8 を導け。

【問 6】 式 9 から 式 11・式 12 を導け。

【問 7】 式 10 から 式 13 を導け。

【 合成関数の微分 】 differentiation of composite functions

【問 8】 以下の関数を微分せよ。

1. $\sqrt{3x}$

2. $4\cos(5x-6)$

3. $\sin(2x)\ \arcsin\dfrac{x}{3}$

4. $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\cos x\right)$

5. $\arctan\left(\sin\sqrt{x}\right)$

6. $\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-5}{3}\right)^2\right\}$

7. $\log\left(\sqrt{4x+3} + 2\sqrt{x+5}\right)$

【以下は復習用問題ですが、時間が余った人は授業時間中に取り組んでください】

8. $\sqrt{(3x^2-2x^3)^3}$ ....(答. $9(x-x^2)\sqrt{3x^2-2x^3}$)

9. $(3+2x+x^2)^{1/3}$ ....(答. $\frac{2(1+x)}{3(3+2x+x^2)^{2/3}}$)

10. $\frac{1}{2x+\frac{1}{x}}$ ....(答. $-\frac{2x^2-1}{(2x^2+1)^2}$)

11. $x\sqrt{2x}$ ....(答. $\frac{3\sqrt{2x}}{2}$)

12. $\sin\frac{1}{x}$ ....(答. $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$)

13. $\sin 2x\cos 3x$.(答. $2\cos 2x\cos 3x - 3\sin 2x\sin 3x$)

14. $\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^8}$ ....(答. $\frac{8}{3x^2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^9}$)

15. $\left(\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ ...(答. $\frac{2}{1+x^2}\arctan\frac{1+x}{1-x}$)

16. $\sin(2\arccos x)$ ....(答. $\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ または $-\frac{2\cos(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ でも正解)

17. $\log(1+\log(1+\log x))$ (答. $\frac{1}{x(1+\log x)(1+\log(1+\log x))}$)

18. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ ....(答. $-\frac{1}{2(x+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$)

19. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (答. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}{8\sqrt{x(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})}}$)

20. $\log\left|\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3+1}\right|$ ....(答. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}$)

18〜20 は微分の結果を変形して答に一致させてみせなさい.

微分積分演習 I No.5

【 x^x の微分 】 differentiation of x to the x

- 底が e 以外の指数関数の微分

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$ これは指数関数ではなく冪 (べき) 関数
2. $(a^x)' = a^x \log a$
3. $(x^x)' = \boxed{}$
4. $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \boxed{}$

【問 1】 上記の 式 2 を導け。

log は exp の逆関数であるから、任意の $a > 0$ に対して $a = e^{\log a}$ である。このことを利用するとよい。

【問 2】 x^x を微分せよ。ただし $x > 0$ とする。

任意の $x > 0$ に対して $x = e^{\log x}$ であることを利用せよ。
(別解法 1) 対数微分法を使う (別解法 2) 偏微分法を使う

【問 3】 任意の 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の合成関数 $f(x)^{g(x)}$ の微分を f, g, f', g' を用いて表せ。

ただし、$f(x) > 0$ とする。

【問 4】 下記の等式を示せ。なお、この式による数式の置き換えを対数微分法 (logarithmic differentiation) という。

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = f(x)\frac{d}{dx}\left(\log|f(x)|\right)}$$

利用例 : $(x^x)' = x^x(\log x^x)' = x^x(x\log x)' = x^x(\log x + 1)$

特に $f(x) = \{f_1(x)\}^{p_1}\cdots\{f_n(x)\}^{p_n}$ のとき

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)\left\{p_1\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + p_n\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right\}$$

利用例 : $f(x) = x^2(x+1)^3(x-1)^{-4}$ のとき

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}\right)x^2(x+1)^3(x-1)^{-4}$$

(補足) 偏微分法 (後述) を用いた $f(x) = x^x$ の微分法

$F(u,v) = u^v$, $u(x) = x$, $v(x) = x$ とすると、

$f(x) = F(u(x), v(x))$. 多変数関数の合成関数の微分則により

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\frac{du(x)}{dx} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\frac{dv(x)}{dx} \\
&= \frac{\partial u^v}{\partial u}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u^v}{\partial v}\frac{dx}{dx} \\
&= vu^{v-1}\cdot 1 + u^v\log u\cdot 1 \\
&= xx^{x-1} + x^x\log x \\
&= x^x(\log x + 1)
\end{aligned}$$

【問 5】 以下の関数を微分せよ。

【注】a^{b^c} は普通は $a^{(b^c)}$ の意味にとり $\left(a^b\right)^c$ $(= a^{(bc)})$ の意味にはとらないが、下記では念のため括弧を使った。

1. $e^{(x^2)}$
2. $2^{(x^2)}$
3. $2^{(2^x)}$
4. $x^{\log x}$
5. $(\log x)^x$
6. $(\log x)^{\log x}$
7. $x^{(x^2)}$
8. $x^{(2^x)}$
9. $2^{(x^x)}$
10. $x^{(x^x)}$

【以下の問題は復習の際に利用してください】

11. $e^{\sqrt{x}}$ .... (答. $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$)
12. $2^{\sqrt{x}}$ .... (答. $\frac{\log 2}{\sqrt{x}}2^{\sqrt{x}-1}$)
13. $x^{\sqrt{x}}$ .... (答. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)$)
14. $e^{\arctan x}$ .... (答. $\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$)
15. $2^{\arctan x}$ .... (答. $\frac{\log 2}{1+x^2}2^{\arctan x}$)
16. $x^{\arctan x}$ .... (答. $x^{\arctan x}\left(\frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{x}\right)$)
17. $\sin\left(x^2\right)$ .... (答. $2x\cos(x^2)$)
18. $\sin(x^x)$ .... (答. $x^x(\log x + 1)\cos(x^x)$)
19. $\sin\left(x^{\sin x}\right)$ .... (答. $x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right)\cos(x^{\sin x})$)
20. $(\sin x)^2$ .... (答. $2\sin x\cos x$)
21. $(\sin x)^x$. (答. $(\sin x)^x\left(\log(\sin x) + x\cot x\right)$)
22. $(\sin x)^{\sin x}$ .... (答. $(\sin x)^{\sin x}\cos x(\log(\sin x) + 1)$)
23. $(\sin x)^{\left((\sin x)^{\sin x}\right)}$ .. (答. $(\sin x)^{(\sin x)^{\sin x}+\sin x}$ $(\cos x\log(\sin x)(\log(\sin x) + 1) + \cot x)$)

微分積分演習 I No.6

【 高階微分 】 high-order differentials

- 記法のいろいろ

１階微分： $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$

２階微分： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$

n 階微分： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n f(x)$ と書いてもよい。

【問 1】 以下の関数の１, ２, ３階微分を求めよ。

1. $\dfrac{1}{x+1}$
2. $\log x$
3. $\arcsin x$
4. $\sinh(x^2)$
5. $\tan x$
6. e^{-x^2}

4 の答: $2x\cosh x^2$, $2\cosh x^2 + 4x^2\sinh x^2$, $8x^3\cosh x^2 + 12x\sinh x^2$.

5 の答: $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $\frac{6-4\cos^2 x}{\cos^4 x}$.

6 の答: $-2xe^{-x^2}$, $2(2x^2-1)e^{-x^2}$, $-4x(2x^2-3)e^{-x^2}$.

【 n 階微分】nth order differentials

関数によっては、任意の階数の微分が一つの数式で表せる。
(例)

$$\begin{array}{|rcl|}\hline (e^x)^{(n)} & = & e^x \\ (\sin x)^{(n)} & = & \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\ (\cos x)^{(n)} & = & \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\ \hline\end{array}$$

【問 2】 以下の n 階微分を求めよ ($n \geq 1$ とする)。

1. $\left(e^{2x}\right)^{(n)}$　2. $\left(e^{-x}\right)^{(n)}$　3. $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{(n)}$

4. $(2^x)^{(n)}$　5. $\left(\sqrt{x}\right)^{(n)}$　6. $\left(\sin^2 x\right)^{(n)}$

5 の答: $-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2n-3)!!\frac{\sqrt{x}}{x^n}$.
ただし $n!!$ (n の double factorial, factorial とは階乗のこと) は、
n が偶数のとき $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 2$、
n が奇数のとき $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 1$
を表す。また、$0!! = (-1)!! = 1$ と定義する。そう定義すれば漸化式 $n!! = n\cdot(n-2)!!$ が $n = 2, 1$ の場合も成立する。

6 の答: $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と書き直してから微分するとよい.

【 関数の積の高階微分】 $\cdots$ of product of functions

ライプニッツ (Leibniz) の公式

$$\boxed{\left\{f(x)\,g(x)\right\}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f^{(n-i)}(x)\,g^{(i)}(x)}$$

ただし $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = {}_nC_i = \dfrac{n!}{(n-i)!\,i!}$: 二項係数

$0! = 1$,　$1! = 1$,　$2! = 2\cdot 1 = 2$,　$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$: 階乗

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

例
$(fg)' = f'g + fg'$
$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$
$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$
$(fg)'''' = f''''g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg''''$

また x^n の $n+1$ 階以上の微分が零である ことにも留意せよ!

$x^0 \xrightarrow{\text{微分}} 0$,　$x^1 \xrightarrow{\text{微分}} 1 \xrightarrow{\text{微分}} 0$,　$x^2 \xrightarrow{\text{微分}} 2x \xrightarrow{\text{微分}} 2 \xrightarrow{\text{微分}} 0$.

【問 3】 下記の n 階導関数を計算せよ ($n \geq 1$ とする)。

1. $(xe^x)^{(n)}$
2. $\left(x^2 e^{-x}\right)^{(n)}$
3. $\left(x^3\sin x\right)^{(n)}$
4. $\left((x+1)^2 e^{2x}\right)^{(n)}$
5. $\left((x^3+x)\cos x\right)^{(n)}$
6. $\left(x^2(x+a)^n\right)^{(n)}$

1 のヒント： $k \geq 2$ に対して $x^{(k)} = 0$ なので

$$(xe^x)^{(n)} = \binom{n}{0}x^{(0)}(e^x)^{(n)} + \binom{n}{1}x^{(1)}(e^x)^{(n-1)}$$

2 のチェック： $n = 10$ を代入すると $(x^2-20x+90)e^{-x}$ になる。

3 のチェック： $n = 10$ で $-(x^3-270x)\sin x + (30x^2-720)\cos x$

下記の関係は容易に証明できる。
$(\sin x)^{(n)} = (\cos x)^{(n-1)} = -(\sin x)^{(n-2)} = -(\cos x)^{(n-3)}$
$(\cos x)^{(n)} = -(\sin x)^{(n-1)} = -(\cos x)^{(n-2)} = (\sin x)^{(n-3)}$
これらの関係を使い、結果に含まれる三角関数を $\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ と $\cos(x+\frac{n\pi}{2})$ だけにしてみよう。

4 の答: $2^n e^{2x}\left\{(x+1)^2 + n(x+1) + \frac{n(n-1)}{4}\right\}$

5 の答: $x\{x^2-(3n^2-3n-1)\}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$+n\{3x^2-(n^2-3n+1)\}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

6 の答: $n!\left\{x^2 + 2nx(x+a) + \frac{1}{2}n(n-1)(x+a)^2\right\}$

微分積分演習 I No.7

【 テーラー展開 】 Taylor expansin

• テーラーの定理

$$f(x) = f(a) + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}$$

とすると, $R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ を満たす ξ が a と x の間に存在する.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ なら $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
- よく目にするのは $a = 0$ の場合である (マクローリン展開).
- R_{n+1} の代わりに $\underline{\mathcal{O}(x^{n+1})}$ または $o(x^n)$ と書くこともある. $\mathcal{O}$ は大文字, o は小文字のオーであり, order の頭文字である.

例題 $\arctan x$ を x^3 の項までテーラー展開せよ.

答 $f(x) = \arctan x \quad \therefore f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \therefore f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \therefore f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \quad \therefore f'''(0) = -2$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

に代入して $\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ を得る.

(補足 1) $\arctan x$ のような奇関数を展開すると, 奇数ベキの項だけが残る. 従ってあらかじめ x^4 の係数はゼロだとわかるので剰余項を $\mathcal{O}(x^5)$ と書いてもよい.

(補足 2) 3 次で止めずに一般項を計算すると (No.8 で示す)

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \cdots$$

となる. $x = 1$ を代入すると, $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ なので,

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \cdots\right)$$

として円周率の値が計算できることがわかる. なおこの式はきれいだが収束が遅い. 少しの工夫ではるかに収束の速い式が得られる.

上記の例題にならい, 【問 1】〜【問 4】の関数 $f(x)$ を $x = 0$ の近傍で, x の 3 次の項までテーラー展開せよ. ただし剰余項は $\mathcal{O}(x^4)$ と略記してよい.

【問 1】 $f(x) = \sin(x + x^2)$

【問 2】 $f(x) = e^{-x}\cos x$

【問 3】 $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$

答は $f(x) = 1 + 2x + \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

【問 4】 $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$

答は $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + \dfrac{7\sqrt{2}}{384}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

【 基本関数のテーラー展開 】

[1] $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

[2] $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$

[3] $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

[4] $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$

[5] $(1+x)^s = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k, \quad \binom{s}{0} = 1,$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

(補足) [1]〜[3] 式は任意の x で, [4],[5] は $|x| < 1$ で成立.

【問 5】 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ.

ただし i は虚数単位であり, $i^2 = -1$ を満たす.

なお, この式を「オイラー (Euler) の関係式 (または公式)」という.

(補足) そもそもは, まず関数が与えられていて, その定義に基づいて べき級数 が得られたのであるが, 観点を逆にして, べき級数こそが関数の定義であると考えれば, 和と積の定義されたどのような対象にもその関数値が定義できることになる. 例えば, 上記のように指数関数を引数が複素数の場合に拡張できる. さらに複雑なもの, 例えば, 正方行列に対する三角関数の値なども定義することができる.

(補足) ところで, 指数法則 $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ にオイラーの関係式を適用してみると, $\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$ となり, 最初と最後の辺の実部同士・虚部同士が等しいことから, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ を得るが, これらは sin と cos の加法定理に他ならない.

以下に示した【問 6】〜【問 10】の関数を $x = 0$ の近傍で x^4 の項までテーラー展開せよ.

【問 6】 $(1+x)^{1/3}$

【問 7】 $\sqrt{1+x}$, 答: $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

【問 8】 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, 答: $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

【問 9】 $\dfrac{1}{1-x}$ $\quad (1 + (-x))^{-1}$ と見て公式 [5] を利用せよ.

答は等比級数の公式: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

【問 10】 $(4+x)^{3/2}$

$4^{3/2}(1 + \frac{x}{4})^{3/2}$ と変形して公式 [5] で $s \to \frac{3}{2}$, $x \to \frac{x}{4}$ とせよ.

【テーラー展開式の操作】

● 和

例題　$\cosh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ をテーラー展開せよ。

答　$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \cdots$

$e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \cdots$

の辺々を足し合わせて 2 で割ると

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + \cdots$ が得られる。

ただし、この例に限っては、直接展開した方が容易に求まる。

【問 1】 $\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ のテーラー展開を $\log(1 \pm x)$ の展開の差をとることで x^6 の項まで求めよ。

● 積

例題　$\sqrt{1-x}\log(1+x)$ のテーラー展開を x の 3 次まで求めよ。　答　$\sqrt{1-x}\,\log(1+x) =$

$\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right)$

$= x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

$= x - x^2 + \frac{11}{24}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

【問 2】 $e^x \sin x$ を x^3 の項までテーラー展開せよ。

● 合成

例題　$e^{\sin x}$ を x の 4 次までテーラー展開せよ。

答　$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^4 + \mathcal{O}(x^5)$．ここで，

$\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, $\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, $\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^6)$ を代入すると

$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ が得られる。

【問 3】 $e^{\cos x}$ を x の 4 次までテーラー展開せよ。

(注) $1 + \cos x + \frac{1}{2!}\cos^2 x + \cdots$ に $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ を代入ではダメ！

● 微分

例題　$\sin x$ の テーラー展開式

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \cdots$

の両辺を x で微分すると $\cos x$ のテーラー展開式

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \cdots$

が得られる.

【問 4】 e^x のテーラー展開式は、微分しても変化しないことを確かめよ. ($(e^x)' = e^x$ と同じ関係を満たすはず)

● 積分

例題　2 項展開式

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + x^{4n} - x^{4n+2} + \cdots$

の両辺を積分区間 $[0, x]$ で定積分すると

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} + \cdots$

が得られる。

【問 5】 $(1+x)^{-1}$ の 2 項展開式を積分して $\log(1+x)$ のテーラー展開式を求めよ.

【問 6】 $(1-x^2)^{-1/2}$ の 2 項展開式を積分して $\arcsin x$ のテーラー展開式を求めよ.

【問 7】 下記の関数を $x = 0$ の近傍でテーラー展開せよ。最低限 x^4 の項までは求めよ.

1. $\cos 2x$
2. $\sin^2 x$
3. $(3+2x)^{-2/3}$
4. $(1 + x^2 + x^3)^{2/3}$
5. $\sqrt{\cos x}$
6. $\log(1 + x + x^2)$
7. $\log(\cos(\sin x))$
8. $\dfrac{e^{-x}}{1+x}$
9. $\dfrac{1}{e^x - \sin x}$
10. $\operatorname{arcsinh} x$
11. $\tan x$
12. e^{e^x}

6 の答:　$\log(1 + x + x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$

7 の答:　まず $\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$ を求め、これを使って $\log(\cos(\sin x)) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$

8 の答:　$\frac{e^{-x}}{1+x} = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 - \frac{163}{60}x^5 + \cdots$

9 の答:　$\frac{1}{e^x - \sin x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{19}{720}x^6 + \cdots$

10 の答:　$\operatorname{arcsinh} x = \int_0^x dt/\sqrt{1+t^2}$ を利用して,

$\operatorname{arcsinh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$, ただし, $0!! = (-1)!! = 1$.

11 の答:　$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$

$\sin x / \cos x$ と表すか, $\arctan x$ の逆関数として求めるか.

12 の答:　$e^{e^x} = e + ex + ex^2 + \frac{5}{6}ex^3 + \frac{5}{8}ex^4 + \frac{13}{30}ex^5 + \cdots$

微分積分演習 I No.9

【 ロピタルの定理 】

● 不定形の極限 limits of indeterminate forms

[1] 差の形 ： $\infty - \infty$

[2] 積・商の形 ： $0 \cdot \infty,\quad \dfrac{0}{0},\quad \dfrac{\infty}{\infty}$

[3] 指数関数の形 ： $0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0$

【補注】log をとると [3] は [2] の形, [2] は [1] の形になる.

● ロピタルの定理 L'Hospital's rule

極限 $x \to a$ で $f(x)$, $g(x)$ が
ともに 0　または　ともに $\pm\infty$
になるとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する. ただし a は $\pm\infty$ でもよい.

よくある間違い・勘違い

i) 分母・分子ともに 0 または ∞ ではない場合に適用してしまう.

ii) 分母・分子 それぞれを微分するべきところを, (分子／分母) を微分してしまい, $\lim(f'g - fg')/g^2$ を計算しようとする.

余談　この定理にはロピタル (Hospital) の名前が冠せられていますが、実はベルヌーイ (Johann Bernoulli) がロピタルに教えたことだと言われています. WEB 検索すれば詳しく分かります。

【問 1】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ.

《考え方》 $\frac{\infty}{\infty}$ 型なのでロピタルの定理が使える.

【問 2】 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ.

《考え方》 $0\cdot\infty$ 型を $\frac{\infty}{\infty}$ 型になおしてからロピタルの定理を使う.

【問 3】 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$ を求めよ.

《考え方》 $\frac{0}{0}$ 型なので ロピタルの定理が使えるが, cos と sin のテーラー展開式を使うのもまた上手な解き方である.

【問 4】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ を求めよ.

《考え方》 1^∞ 型は対数をとるとロピタルの定理が使える. 即ち, 任意の $A>0$ について $A = \exp(\log A)$ が成立することを利用する.

【問 5】 $y = x^x$ $(x>0)$ のグラフを描け.

$x \to +0$ での極限値を必ず求めよ. また極値をとる点での x, y の値 も求めよ.

【問 6】 $y = x^{1/x}$ $(x>0)$ のグラフを描け.

$x \to +0$ および $x \to \infty$ での極限値 を必ず求めよ. また, 極値をとる点での x, y の値 も求めよ. 変曲点は求めなくてもよい.

【偏微分】 partial differentiation

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$: y を定数とみなして x で微分する. f_x とも書く.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$: x を定数とみなして y で微分する. f_y とも書く.

● 高階偏微分

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$　f_{xx} とも書く.

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$　f_{xy} とも書く.

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$　f_{yx} とも書く.

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$　f_{yy} とも書く.

● ほとんどの場合に $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する.

計算例　$f(x,y) = x^4 + 3x^2y + 2xy^2$ のとき,

$f_x = 4x^3 + 6xy + 2y^2,\quad f_y = 3x^2 + 4xy,$

$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 + 6xy + 2y^2) = 12x^2 + 6y$

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 6xy + 2y^2) = 6x + 4y$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4xy) = 6x + 4y$

$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy) = 4x$

【問 7】 $f(x,y) = \sin\frac{y}{x+1}$ の f_x, f_y を求めよ.

《考え方》 $t = \frac{y}{x+1}$ とおくと $f_x = \left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\frac{\partial t}{\partial x}$.

【問 8】 $f(x,y) = x^y$ の f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} を求めよ. 《考え方》 $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(a^x)' = a^x\log a$ を利用.

【２変数関数のテーラー展開と極値】

$x = a + \Delta x$, $y = b + \Delta y$ とすると,

$f(x,y) = f_{(a,b)} + f_{x(a,b)}\Delta x + f_{y(a,b)}\Delta y$ ← 接平面の方程式
$+\frac{1}{2!}\left(f_{xx(a,b)}(\Delta x)^2 + 2f_{xy(a,b)}\Delta x\Delta y + f_{yy(a,b)}(\Delta y)^2\right) + R_3$

2 変数関数 $f(x,y)$ は, $f_x = f_y = 0$ を満たす点 (停留点) で,

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ かつ $f_{xx}\begin{cases} >0 \text{ なら極小値をとる.} \\ <0 \text{ なら極大値をとる.}\end{cases}$

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ なら極値をとらない (鞍点).

停留点: stationary point,　鞍点: saddle point

【問 9】 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x$ の極値 および それに対応する (x,y) を求めよ.

【問 10】 2 変数関数 $f(x,y) = x(1 - \frac{1}{3}x^2 - y^2)$ の極値および それに対応する (x,y) を求めよ.

微分積分演習 I No.10

【$^{(仮称)}$ 全微分の公式】"total differential formula"

$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(x,y)$ のとき

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ただし各々の微分・偏微分の意味は下記のとおり.

$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}z\left(x(t),y(t)\right),\ \frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}x(t),\ \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}y(t)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}z(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}z(x,y).$

また, 両辺に 「dt を掛けた」ものを z の全微分式という:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

● 全微分式の意味は, 複数の要因の小さな変化が引き起こす変動は, 個々の要因の変化の影響を足し合わせたものになるということである. 変化が小さければ展開の 2 次以上の項が無視できるからである.

【問 1】 球形のゴム風船に空気を送り込んで膨張させている. 球の半径が r [cm], 中の空気の質量が m [g] のとき, 中の空気の密度 ρ [g/cm^3] は $\rho=\dfrac{3m}{4\pi r^3}$ と表わされる. ある時刻において, r は値が 20 cm で, 1 cm/s の割合で増加している (即ち r=20, $\frac{dr}{dt}$=1). また, m は値が 50 g で, 8 g/s の割合で増加している (即ち m=50, $\frac{dm}{dt}$=8). この時刻における ρ の増加率 [g/cm^3 s] を (即ち $\frac{d\rho}{dt}$ を) 求めよ.

【注】この問に関しては, 円周率 π を 3.14 などの近似値におきかえないこと. また, 分数を小数で近似しないこと.

【注】この時刻を $t=0$ とすれば $r=20+t+\mathcal{O}(t^2)$, $m=50+8t+\mathcal{O}(t^2)$ である. これらを ρ の表式に代入して得られる Taylor 展開式の t^1 の項の係数が答だが, そのような解法で満足せず, 必ず上記の公式を活用して求めよ.

【問 2】 抵抗値 R をもつ抵抗器に電圧 V をかけると単位時間あたりに発生するジュール熱は $W=\dfrac{V^2}{R}$ である. 抵抗値 が ΔR, 電圧が ΔV だけ変化すると, W は ΔW だけ変化するとして, ΔW を $R,V,\Delta R,\Delta V$ を用いて表せ. 次に, $\Delta V/V=-0.01$, $\Delta R/R=0.05$ のとき, $\Delta W/W$ を求めよ.

【注】$\Delta W=\frac{(V+\Delta V)^2}{R+\Delta R}-\frac{V^2}{R}$ が正確な答であるが, 求めて欲しいのは正確な式ではなく, それを ΔR, ΔV の 1 次の項までで近似する式である. 1 次近似の範囲でなら, V,R の値を与えなくても $\Delta W/W$ の値が決まる.

【問 3】 半径 r, 高さ h のペレットの体積は $V=\pi r^2h$ と表される. 製造時に生じる r の誤差を Δr, h の誤差を Δh とする. r=1.00 cm, h=2.00 cm, $|\Delta r|\le 0.05$ cm, $|\Delta h|\le 0.05$ cm であるとき, V の誤差の上限を (有効数字を考慮して) 小数値 (cm^3) で求めよ. 次に, V の相対誤差 ($\Delta V/V$ のこと) の上限を, r と h のそれぞれの寄与に分けて示せ.

【注】$|\pi(r+\Delta r)^2(h+\Delta h)-\pi r^2h|$ が最大誤差の正確な値となるが, この式ではなく, Δr と Δh の 1 次の近似式を利用せよ. 後の問には「V の相対誤差は 15 % であり, そのうち 9% が r の誤差から, 6 % が h の誤差から生じている」のように答えよ.

【$^{(仮称)}$ 偏微分の変数変換の公式】

$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$ のとき

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}$$

左辺では $z=z\left(x(u,v),y(u,v)\right)$, 右辺では $z=z(x,y)$.

また, 「z を省略して」下記のようにも書く.

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$$

【問 4】 $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$ のとき下記の小問に答えよ.

i) 行列 $T=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ の各成分を u,v の関数として求めよ.

ii) $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ を u, v, $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ.

iii) ラプラス演算子 (Laplacian) $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を u, v, $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ.

【問 5】 $u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $v=\arctan\frac{y}{x}$ のとき下記の小問に答えよ.

i) 行列 $T'=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ の各成分を x,y の関数として求めよ.

ii) $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ を x, y, $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ を用いて表せ.

iii) $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ を x, y, $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ を用いて表せ.

【問 6】 問 4 の変数変換と 問 5 の変数変換は, お互いの逆変換になっている. このとき, T と T' はお互いの逆行列になる. まず, そうなる理由を説明した上で, 実際にそうなっていることを確認せよ.

【問 7】 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ およびその逆変換 $r=\sqrt{x^2+y^2}\quad\theta=\arctan\frac{y}{x}$ について, 問 4〜6 と同様の計算を行なってみよ.

【問 8】 $x=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\quad y=uv$ であるとき, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を u, v, $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ.