【(仮称) 全微分の公式】“total differential formula”

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(x,y)$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ただし各々の微分・偏微分の意味は下記のとおり．

$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} z\left(x(t), y(t)\right), \ \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}x(t), \ \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}y(t)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} z(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} z(x,y).$

また, 両辺に「dt を掛けた」ものを z の全微分式という:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

● 全微分式の意味は, 複数の要因の小さな変化が引き起こす変動は, 個々の要因の変化の影響を足し合わせたものになるということである．変化が小さければ展開の 2 次以上の項が無視できるからである．

【問 1】 球形のゴム風船に空気を送り込んで膨張させている．球の半径が r [cm], 中の空気の質量が m [g] のとき, 中の空気の密度 ρ [g/cm^3] は $\rho = \dfrac{3m}{4\pi r^3}$ と表わされる。ある時刻において, r は値が 20 cm で、1 cm/s の割合で増加している (即ち r=20, $\frac{dr}{dt}$=1)．また、m は値が 50 g で、8 g/s の割合で増加している (即ち m=50, $\frac{dm}{dt}$=8)．この時刻における ρ の増加率 [g/cm^3 s] を (即ち $\frac{d\rho}{dt}$ を) 求めよ．

【注】この問に関しては、円周率 π を 3.14 などの近似値におきかえないこと．また、分数を小数で近似しないこと．

【問 2】 抵抗値 R をもつ抵抗器に電圧 V をかけると単位時間あたりに発生するジュール熱は $W = \dfrac{V^2}{R}$ である．抵抗値 が ΔR, 電圧が ΔV だけ変化すると, W は ΔW だけ変化するとして, ΔW を $R, V, \Delta R, \Delta V$ を用いて表せ．次に, $\Delta V/V = -0.01$, $\Delta R/R = 0.05$ のとき, $\Delta W/W$ を求めよ．

【注】$\Delta W = \frac{(V+\Delta V)^2}{R+\Delta R} - \frac{V^2}{R}$ が正確な答であるが, 求めて欲しいのは正確な式ではなく, それを ΔR, ΔV の 1 次の項までで近似する式である．1 次近似の範囲でなら, V, R の値を与えなくても $\Delta W/W$ の値が決まる．

【問 3】 半径 r, 高さ h のペレットの体積は $V = \pi r^2 h$ と表される．製造時に生じる r の誤差を Δr, h の誤差を Δh とする．r=1.00 cm, h=2.00 cm, $|\Delta r| \le 0.05$ cm, $|\Delta h| \le 0.05$ cm であるとき, V の誤差の上限を (有効数字を考慮して) 小数値 (cm^3) で求めよ．次に, V の相対誤差 ($\Delta V/V$ のこと) の上限を, r と h のそれぞれの寄与に分けて示せ．

【注】$|\pi(r+\Delta r)^2(h+\Delta h) - \pi r^2 h|$ が最大誤差の正確な値となるが, この式ではなく, Δr と Δh の 1 次の近似式を利用せよ．後の問には「V の相対誤差は 15 % であり, そのうち 9% が r の誤差から, 6 % が h の誤差から生じている」のように答えよ．

【(仮称) 偏微分の変数変換の公式】

$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$ のとき

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

左辺では $z = z\left(x(u,v), y(u,v)\right)$, 右辺では $z = z(x,y)$.

また, 「z を省略して」下記のようにも書く．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

【問 4】 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ のとき下記の小問に答えよ．

i) 行列 $T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ の各成分を u, v の関数として求めよ．

ii) $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ を u, v, $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ．

iii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を u, v, $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ．

【問 5】 $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $v = \arctan\frac{y}{x}$ のとき下記の小問に答えよ．

i) 行列 $T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ の各成分を x, y の関数として求めよ．

ii) $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$ を x, y, $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ を用いて表せ．

iii) $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ を x, y, $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ を用いて表せ．

【問 6】 問 4 の変数変換と 問 5 の変数変換は, お互いの逆変換になっている．このとき, T と T' はお互いの逆行列になる．まず, そうなる理由を説明した上で, 実際にそうなっていることを確認せよ．

【問 7】 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ およびその逆変換 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$ について, 問 4〜6 と同様の計算を行なってみよ．

【問 8】 $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv$ であるとき, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を u, v, $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ．