【 ロピタルの定理 】

● 不定形の極限 limits of indeterminate forms

[1] 差の形 ： $\infty - \infty$

[2] 積・商の形 ： $0 \cdot \infty,\quad \dfrac{0}{0},\quad \dfrac{\infty}{\infty}$

[3] 指数関数の形 ： $0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0$

【補注】 log をとると [3] は [2] の形, [2] は [1] の形になる.

● ロピタルの定理 L'Hospital's rule

> 極限 $x \to a$ で $f(x), g(x)$ が
> ともに 0　または　ともに $\pm\infty$
> になるとき
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
> が成立する. ただし a は $\pm\infty$ でもよい.

よくある間違い・勘違い

i) 分母・分子ともに 0 または ∞ ではない場合に適用してしまう.

ii) 分母・分子 それぞれを微分するべきところを, (分子／分母) を微分してしまい, $\lim(f'g - fg')/g^2$ を計算しようとする.

Internet で調べてみよう

この定理は、ベルヌーイ (Johann Bernoulli) に教えてもらったことをロピタルが発表したのだと言われています.

検索キーワード： Hospital, Bernoulli

【問 1】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ.

《考え方》 $\frac{\infty}{\infty}$ 型なのでロピタルの定理が使える.

【問 2】 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ.

《考え方》 $0\cdot\infty$ 型を $\frac{\infty}{\infty}$ 型になおしてからロピタルの定理を使う.

【問 3】 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$ を求めよ.

《考え方》 $\frac{0}{0}$ 型なので ロピタルの定理が使えるが, cos と sin のテーラー展開式を使うのもまた上手な解き方である.

【問 4】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ を求めよ.

《考え方》 1^∞ 型は対数をとるとロピタルの定理が使える. 即ち, 任意の $A>0$ について $A = \exp(\log A)$ が成立することを利用する.

【問 5】 $y = x^x$ $(x>0)$ のグラフを描け.

　$x \to +0$ での極限値を必ず求めよ. また極値をとる点での x, y の値 も求めよ.

【問 6】 $y = x^{1/x}$ $(x>0)$ のグラフを描け.

　$x\to+0$ および $x\to\infty$ での極限値 を必ず求めよ. また, 極値をとる点での x, y の値 も求めよ. 変曲点は求めなくてもよい.

【偏微分】 partial differentiation

> $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ： y を定数とみなして x で微分する. f_x とも書く.
>
> $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ： x を定数とみなして y で微分する. f_y とも書く.

● 高階偏微分

> $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$　f_{xx} とも書く.
>
> $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$　f_{xy} とも書く.
>
> $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$　f_{yx} とも書く.
>
> $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$　f_{yy} とも書く.
>
> ● ほとんどの場合に $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する.

計算例　$f(x,y) = x^4 + 3x^2y + 2xy^2$ のとき,

$f_x = 4x^3 + 6xy + 2y^2,\quad f_y = 3x^2 + 4xy,$

$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 + 6xy + 2y^2) = 12x^2 + 6y$

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 6xy + 2y^2) = 6x + 4y$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4xy) = 6x + 4y$

$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy) = 4x$

【問 7】 $f(x,y) = \sin\frac{y}{x+1}$ の f_x, f_y を求めよ.

《考え方》 $t = \frac{y}{x+1}$ とおくと $f_x = \left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\frac{\partial t}{\partial x}$.

【問 8】 $f(x,y) = x^y$ の f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} を求めよ. 《考え方》$(x^a)' = ax^{a-1}$, $(a^x)' = a^x\log a$ を利用.

【2 変数関数のテーラー展開と極値】

$x = a + \Delta x$, $y = b + \Delta y$ とすると,

> $f(x,y) = f_{(a,b)} + f_{x(a,b)}\Delta x + f_{y(a,b)}\Delta y$ ← 接平面の方程式
> $+\frac{1}{2!}\left(f_{xx(a,b)}(\Delta x)^2 + 2f_{xy(a,b)}\Delta x\Delta y + f_{yy(a,b)}(\Delta y)^2\right) + R_3$

> 2 変数関数 $f(x,y)$ は, $f_x = f_y = 0$ を満たす点において,
> $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ かつ f_{xx} $\begin{cases} >0 \text{ なら極小値をとる.} \\ <0 \text{ なら極大値をとる.}\end{cases}$
> $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ なら極値をとらない (鞍点, saddle point)

【問 9】　2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x$ の極値 および それに対応する (x,y) を求めよ.

【問 10】　2 変数関数 $f(x,y) = x(1 - \frac{1}{3}x^2 - y^2)$ の極値および それに対応する (x,y) を求めよ.