【テーラー展開式の操作】

● 和

例題　$\cosh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ をテーラー展開せよ。

答　$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \cdots$

$e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \cdots$

の辺々を足し合わせて 2 で割ると

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + \cdots$ が得られる。

ただし、この例に限っては、直接展開した方が容易に求まる。

【問 1】　$\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ のテーラー展開を $\log(1 \pm x)$ の展開の差をとることで x^6 の項まで求めよ。

● 積

例題　$\sqrt{1-x}\log(1+x)$ のテーラー展開を x の 3 次まで求めよ。　答　$\sqrt{1-x}\,\log(1+x) = \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right)$
$= x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4)$
$= x - x^2 + \frac{11}{24}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

【問 2】 $e^x \sin x$ を x^3 の項までテーラー展開せよ。

● 合成

例題　$e^{\sin x}$ を x の 4 次までテーラー展開せよ。

答　$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^4 + \mathcal{O}(x^5)$. ここで, $\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, $\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, $\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^6)$ を代入すると $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ が得られる。

【問 3】　$e^{\cos x}$ を x の 4 次までテーラー展開せよ。

(注) $1 + \cos x + \frac{1}{2!}\cos^2 x + \cdots$ に $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ を代入ではダメ！

● 微分

例題　$\sin x$ の Taylor 展開式

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \cdots$

の両辺を x で微分すると $\cos x$ の Taylor 展開式

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \cdots$

が得られる.

【問 4】　e^x の Taylor 展開式は、微分しても変化しないことを確かめよ. ($(e^x)' = e^x$ と同じ関係を満たすはず)

● 積分

例題　2 項展開式

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + x^{4n} - x^{4n+2} + \cdots$

の両辺を積分区間 $[0, x]$ で定積分すると

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} + \cdots$

が得られる。

【問 5】　$(1-x^2)^{-1/2}$ の 2 項展開式を積分して $\arcsin x$ の Taylor 展開式を求めよ.

【問 6】　下記の関数を $x = 0$ の近傍で Taylor 展開せよ。最低限 x^4 の項までは求めよ.

1. $\cos 2x$
2. $\sin^2 x$
3. $(3 + 2x)^{-2/3}$
4. $(1 + x^2 + x^3)^{2/3}$
5. $\sqrt{\cos x}$
6. $\log(1 + x + x^2)$
7. $\log\left(\cos\left(\sin x\right)\right)$
8. $\dfrac{e^{-x}}{1+x}$
9. $\dfrac{1}{e^x - \sin x}$
10. $\operatorname{arcsinh} x$
11. $\tan x$
12. e^{e^x}

6 の答:　$\log(1 + x + x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$

7 の答:　まず $\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$ を求め、これを使って $\log(\cos(\sin x)) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$

8 の答:　$\frac{e^{-x}}{1+x} = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 - \frac{163}{60}x^5 + \cdots$

9 の答:　$\frac{1}{e^x - \sin x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{19}{720}x^6 + \cdots$

10 の答:　$\operatorname{arcsinh} x = \int_0^x dt/\sqrt{1+t^2}$ を利用して,

$\operatorname{arcsinh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$, ただし, $0!! = (-1)!! = 1$.

11 の答:　$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$

$\sin x / \cos x$ と表すか, $\arctan x$ の逆関数として求めるか.

12 の答:　$e^{e^x} = e + ex + ex^2 + \frac{5}{6}ex^3 + \frac{5}{8}ex^4 + \frac{13}{30}ex^5 + \cdots$