【 テーラー展開 】 Taylor expansin

● テーラーの定理

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1} \end{aligned}}$$

とすると、$R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ を満たす ξ が a と x の間に存在する。

● $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ なら $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

● よく目にするのは $a=0$ の場合である (マクローリン展開)。

● R_{n+1} の代わりに $\underline{\mathcal{O}(x^{n+1})}$ または $o(x^n)$ と書くこともある.

例題 $\arctan x$ を x^3 の項までテーラー展開せよ。

答 $f(x) = \arctan x \quad \therefore f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \therefore f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \therefore f''(0) = 0$

$f'''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \quad \therefore f'''(0) = -2$

$f(x) = f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^4)$

に代入して $\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ を得る。

(補足 1) $\arctan x$ のような奇関数を展開すると、奇数ベキの項だけが残る。従ってあらかじめ x^4 の係数はゼロだとわかるので剰余項を $\mathcal{O}(x^5)$ と書いてもよい。

(補足 2) 3 次で止めずに一般項を計算すると (No.8 で示す)

$\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7 + \dfrac{1}{9}x^9 - \dfrac{1}{11}x^{11} + \cdots$

となる。$x=1$ を代入すると、$\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ なので、

$\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} - \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{17} - \cdots\right)$

として円周率の値が計算できることがわかる。なおこの式はきれいだが収束が遅い。少しの工夫ではるかに収束の速い式が得られる。

上記の例題にならい、【問 1】〜【問 4】の関数 $f(x)$ を $x=0$ の近傍で、x の 3 次の項までテーラー展開せよ。ただし剰余項は $\mathcal{O}(x^4)$ と略記してよい。

【問 1】 $f(x) = \sin(x+x^2)$

【問 2】 $f(x) = e^{-x}\cos x$

【問 3】 $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$

答は $f(x) = 1 + 2x + \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

【問 4】 $f(x) = \sqrt{1+e^x}$

答は $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + \dfrac{7\sqrt{2}}{384}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

【 基本関数のテーラー展開 】

[1] $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

[2] $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$

[3] $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

[4] $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$

[5] $(1+x)^s = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k, \quad \binom{s}{0} = 1,$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

(補足) [1]〜[3] 式は任意の x で、[4],[5] は $|x| < 1$ で成立。

【問 5】 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を示せ。

ただし i は虚数単位であり、$i^2 = -1$ を満たす。

なお、この式を「オイラー (Euler) の関係式 (または公式)」という。

(補足) そもそもは、まず関数が与えられていて、その定義に基づいて べき級数 が得られたのであるが、観点を逆にして、べき級数こそが関数の定義であると考えれば、積の定義されたどのような対象にもその関数値が定義できることになる。例えば、上記のように指数関数を引数が複素数の場合に拡張できる。さらに複雑なもの、例えば、正方行列に対する三角関数の値なども定義することができる。

(補足) ところで、指数法則 $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ にオイラーの関係式を適用してみると、$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)$ となり、最初と最後の辺の実部同士・虚部同士が等しいことから, $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$, $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ を得るが、これらは sin と cos の加法定理に他ならない。

以下に示した【問 6】〜【問 10】の関数を $x=0$ の近傍で x^4 の項までテーラー展開せよ。

【問 6】 $(1+x)^{1/3}$

【問 7】 $(4+x)^{3/2}$

公式 [5] を利用して、微分を実行せずに答を出すこと。

【問 8】 $\sqrt{1+x}$、答: $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

【問 9】 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$、答: $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

【問 10】 $\dfrac{1}{1-x}$ 　$(1+(-x))^{-1}$ と考えよ。

答は等比級数の公式: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$