2006 年度前期・担当 田嶋
福井大学物理工学科 1 年生

微分積分演習 I No.6

【 高階微分 】 high-order differentials

● 記法のいろいろ

1階微分： $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$

2階微分： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$

n 階微分： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n f(x)$ と書いてもよい。

【問 1】 以下の関数の１，２，３階微分を求めよ。

1. $\dfrac{1}{x+1}$
2. $\log x$
3. $\arcsin x$
4. $\sinh(x^2)$
5. $\tan x$
6. e^{-x^2}

4 の答: $2x\cosh x^2$, $2\cosh x^2 + 4x^2 \sinh x^2$,
$8x^3\cosh x^2 + 12x\sinh x^2$.

5 の答: $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $\frac{6-4\cos^2 x}{\cos^4 x}$.

6 の答: $-2xe^{-x^2}$, $2(2x^2-1)e^{-x^2}$, $-4x(2x^2-3)e^{-x^2}$.

【 n 階微分】nth order differentials

関数によっては、任意の階数の微分が一つの数式で表せる。
(例)

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (e^x)^{(n)} & = & e^x \\ (\sin x)^{(n)} & = & \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ (\cos x)^{(n)} & = & \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{array}}$$

【問 2】 以下の n 階微分を求めよ ($n \geq 1$ とする)。

1. $\left(e^{2x}\right)^{(n)}$ 2. $\left(e^{-x}\right)^{(n)}$ 3. $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{(n)}$

4. $(2^x)^{(n)}$ 5. $\left(\sqrt{x}\right)^{(n)}$ 6. $\left(\sin^2 x\right)^{(n)}$

5 の答: $-\left(-\frac{1}{2}\right)^n (2n-3)!!\frac{\sqrt{x}}{x^n}$.
ただし $n!!$ (n の double factorial, factorial とは階乗のこと) は、
n が偶数のとき $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 2$、
n が奇数のとき $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 1$
を表す。

6 の答: $-2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と書き直してから微分するとよい.

【 関数の積の高階微分】 $\cdots$ of product of functions

ライプニッツ (Leibniz) の公式

$$\boxed{\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x)}$$

ただし $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = {}_nC_i = \dfrac{n!}{(n-i)!\,i!}$: 二項係数

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2\cdot 1 = 2$, $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$: 階乗

例

$(fg)' = f'g + fg'$
$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$
$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$
$(fg)'''' = f''''g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg''''$

また x^n の $n+1$ 階以上の微分が零である ことにも留意せよ!

$x^0 \xrightarrow{微分} 0$
$x^1 \xrightarrow{微分} 1 \xrightarrow{微分} 0$
$x^2 \xrightarrow{微分} 2x \xrightarrow{微分} 2 \xrightarrow{微分} 0$
$x^3 \xrightarrow{微分} 3x^2 \xrightarrow{微分} 6x \xrightarrow{微分} 6 \xrightarrow{微分} 0$

【問 3】 下記の n 階導関数を計算せよ ($n \geq 1$ とする)。

1. $(xe^x)^{(n)}$
2. $\left(x^2 e^{-x}\right)^{(n)}$
3. $\left(x^3 \sin x\right)^{(n)}$
4. $\left((x+1)^2 e^{2x}\right)^{(n)}$
5. $\left((x^3+x)\cos x\right)^{(n)}$
6. $\left(x^2(x+a)^n\right)^{(n)}$

1 のヒント： $k \geq 2$ に対して $x^{(k)} = 0$ なので

$$(xe^x)^{(n)} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^{(0)}(e^x)^{(n)} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{(1)}(e^x)^{(n-1)}$$

2 のチェック： $n = 10$ を代入すると $(x^2 - 20x + 90)e^{-x}$ になる。

3 のチェック： $n = 10$ で $-(x^3 - 270x)\sin x + (30x^2 - 720)\cos x$

下記の関係は、容易に証明できる。
$(\sin x)^{(n)} = (\cos x)^{(n-1)} = -(\sin x)^{(n-2)} = -(\cos x)^{(n-3)}$,
$(\cos x)^{(n)} = -(\sin x)^{(n-1)} = -(\cos x)^{(n-2)} = (\sin x)^{(n-3)}$.
これらの関係を使い、結果に含まれる三角関数を $\sin(x + \frac{n\pi}{2})$ と $\cos(x + \frac{n\pi}{2})$ だけにしてみよう。

4 の答: $2^n e^{2x}\left\{(x+1)^2 + n(x+1) + \frac{n(n-1)}{4}\right\}$

5 の答: $x\{x^2 - (3n^2 - 3n - 1)\}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$+n\{3x^2 - (n^2 - 3n + 1)\}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

6 の答: $n!\left\{x^2 + 2nx(x+a) + \frac{1}{2}n(n-1)(x+a)^2\right\}$