

【 x^x の微分】 differentiation of x to the x

● 底が e 以外の指数関数の微分

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$ これは指数関数ではなく冪 (べき) 関数
2. $(a^x)' = a^x \log a$
3. $(x^x)' = \boxed{\hspace{4cm}}$
4. $(f(x)^{g(x)})' = \boxed{\hspace{4cm}}$

【問 1】 上記の式 2 を導け。

\log は \exp の逆関数であるから、任意の $a > 0$ に対して $a = e^{\log a}$ である。このことを利用するとよい。

【問 2】 x^x を微分せよ。ただし $x > 0$ とする。

任意の $x > 0$ に対して $x = e^{\log x}$ であることを利用せよ。
(別解法 1) 対数微分法を使う (別解法 2) 偏微分法を使う

【問 3】 任意の 2 つの関数 $f(x), g(x)$ の合成関数 $f(x)^{g(x)}$ の微分を f, g, f', g' を用いて表せ。

ただし、 $f(x) > 0$ とする。

【問 4】 下記の等式を示せ。なお、この式による数式の置き換えを対数微分法 (logarithmic differentiation) という。

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} (\log |f(x)|)}$$

利用例: $(x^x)' = x^x (\log x^x)' = x^x (x \log x)' = x^x (\log x + 1)$

$$\boxed{\text{特に } f(x) = \{f_1(x)\}^{p_1} \cdots \{f_n(x)\}^{p_n} \text{ のとき} \\ \frac{df(x)}{dx} = f(x) \left\{ p_1 \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + p_n \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \right\}}$$

利用例: $f(x) = x^2(x+1)^3(x-1)^{-4}$ のとき
 $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1} \right) x^2(x+1)^3(x-1)^{-4}$

(補足) 偏微分法 (後述) を用いた $f(x) = x^x$ の微分法

$F(u, v) = u^v$, $u(x) = x$, $v(x) = x$ とすると、
 $f(x) = F(u(x), v(x))$. 多変数関数の合成関数の微分則により

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \frac{du(x)}{dx} + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \frac{dv(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial u^v}{\partial u} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u^v}{\partial v} \frac{dx}{dx} \\ &= v u^{v-1} \cdot 1 + u^v \log u \cdot 1 \\ &= x x^{x-1} + x^x \log x \\ &= x^x (\log x + 1) \end{aligned}$$

【問 5】 以下の関数を微分せよ。

【注】 a^{b^c} は普通は $a^{(b^c)}$ の意味にとり $(a^b)^c (= a^{bc})$ の意味にはとらないが、下記では念のため括弧を使った。

1. $e^{(x^2)}$
2. $2^{(x^2)}$
3. $2^{(2^x)}$
4. $x^{\log x}$
5. $(\log x)^x$
6. $(\log x)^{\log x}$
7. $x^{(x^2)}$
8. $x^{(2^x)}$
9. $2^{(x^x)}$
10. $x^{(x^x)}$

【以下の問題は復習の際に利用してください】

11. $e^{\sqrt{x}}$ (答. $\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$)
12. $2^{\sqrt{x}}$ (答. $\frac{\log 2}{\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}-1}$)
13. $x^{\sqrt{x}}$ (答. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \log x + 1 \right)$)
14. $e^{\arctan x}$ (答. $\frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x}$)
15. $2^{\arctan x}$ (答. $\frac{\log 2}{1+x^2} 2^{\arctan x}$)
16. $x^{\arctan x}$ (答. $x^{\arctan x} \left(\frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{x} \right)$)
17. $\sin(x^2)$ (答. $2x \cos(x^2)$)
18. $\sin(x^x)$ (答. $x^x (\log x + 1) \cos(x^x)$)
19. $\sin(x^{\sin x})$
 . (答. $x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) \cos(x^{\sin x})$)
20. $(\sin x)^2$ (答. $2 \sin x \cos x$)
21. $(\sin x)^x$. (答. $(\sin x)^x (\log(\sin x) + x \cot x)$)
22. $(\sin x)^{\sin x}$
 (答. $(\sin x)^{\sin x} \cos x (\log(\sin x) + 1)$)
23. $(\sin x)^{((\sin x)^{\sin x})}$.. (答. $(\sin x)^{(\sin x)^{\sin x} + \sin x} (\cos x \log(\sin x) (\log(\sin x) + 1) + \cot x)$)