

【基本関数の微分】 derivatives of basic functions

● 基本関数とその逆関数の微分

1. $(x^s)' = sx^{s-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\log x)' = \frac{1}{x}$ 又は $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
9. $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$
10. $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
11. $(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
12. $(\operatorname{arccosh} x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (2 枝)
13. $(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

を付けた 3 つの式が基本。式 9 は双曲線関数の定義および式 2 から導びける。その他の式は を付けた 3 つの式と式 9 から導ける。3 式と 3 式は是非暗記してください。

関数の商の微分公式 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ を利用して問 18,19 に答えよ。

【問 1】式 4 から式 5 を導け。 (参考) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

【問 2】式 9 から式 10 を導け。 (参考) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

逆関数の微分公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ を利用して問 3~7 に答えよ。

【問 3】式 2 から式 3 を導け。

【問 4】式 4 から式 6・式 7 を導け。

【問 5】式 5 から式 8 を導け。

【問 6】式 9 から式 11・式 12 を導け。

【問 7】式 10 から式 13 を導け。

【合成関数の微分】 differentiation of composite functions

【問 8】以下の関数を微分せよ。

1. $\sqrt{3x}$
2. $4 \cos(5x - 6)$
3. $\sin(2x) \arcsin \frac{x}{3}$
4. $\arccos\left(\frac{1}{2} \cos x\right)$
5. $\arctan(\sin \sqrt{x})$
6. $\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-5}{3}\right)^2\right)$
7. $\log(\sqrt{4x+3} + 2\sqrt{x+5})$

【以下は復習用問題ですが、時間が余った人は授業時間中に取り組んでください】

8. $\sqrt{(3x^2 - 2x^3)^3} \dots$ (答. $9(x - x^2)\sqrt{3x^2 - 2x^3}$)
9. $(3 + 2x + x^2)^{1/3} \dots$ (答. $\frac{2(1+x)}{3(3+2x+x^2)^{2/3}}$)
10. $\frac{1}{2x + \frac{1}{x}} \dots$ (答. $-\frac{2x^2-1}{(2x^2+1)^2}$)
11. $x\sqrt{2x} \dots$ (答. $\frac{3\sqrt{2x}}{2}$)
12. $\sin \frac{1}{x} \dots$ (答. $-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$)
13. $\sin 2x \cos 3x \dots$ (答. $2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$)
14. $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^8} \dots$ (答. $\frac{8}{3x^2 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^9}$)
15. $\left(\arctan \frac{1+x}{1-x}\right)^2 \dots$ (答. $\frac{2}{1+x^2} \arctan \frac{1+x}{1-x}$)
16. $\sin(2 \arccos x) \dots$ (答. $\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
または $-\frac{2 \cos(2 \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ でも正解)
17. $\log(1 + \log(1 + \log x))$ (答. $\frac{1}{x(1+\log x)(1+\log(1+\log x))}$)
18. $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \dots$ (答. $-\frac{1}{2(x+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$)
19. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \dots$ (答. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}{8\sqrt{x(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})}$)
20. $\log\left|\sqrt{x^3 + \sqrt{x^3 + 1}}\right| \dots$ (答. $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}$)

18~20 は微分の結果を変形して答に一致させてみせなさい。