

● 逆三角関数に関する追加問題

- 【問 1】 $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ の値を求めよ。
- 【問 2】 $\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。
- 【問 3】 $\tan\left(\arcsin\frac{1}{10}\right)$ の値を求めよ。
- 【問 4】 $\arcsin x = \arctan 2$ を満たす x を求めよ。
- 【問 5】 $\arccos x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$ を満たす x を求めよ。
- 【問 6】 $\arctan x = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$ を満たす x を求めよ。
- 【問 7】 $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3} - \arcsin\frac{1}{4}\right)$ の値を求めよ。
- 【問 8】 $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3} = \arcsin x$ を満たす x を求めよ。ただし左辺の値が $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に入っていることはあらかじめ分かっているものとせよ。
- 【問 9】 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ の値を求めよ。
- 【問 10】 $\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$ の値を求めよ。
- 【問 11】 $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$ の値を求めよ。
- 【問 12】 $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}\right)$ の値を求めよ。

以下は自習用の基礎的な問題です。

- 【問 13】 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ (答. $\frac{\pi}{3}$)
- 【問 14】 $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (答. $-\frac{\pi}{3}$)
- 【問 15】 $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ (答. $\frac{\pi}{4}$)
- 【問 16】 $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (答. $\frac{3}{4}\pi$)
- 【問 17】 $\arctan\sqrt{3}$ (答. $\frac{\pi}{3}$)
- 【問 18】 $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$ (答. $-\frac{\pi}{3}$)
- 【問 19】 $\sin\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ (答. $-\frac{3}{5}$)
- 【問 20】 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ (答. $\frac{\sqrt{5}}{3}$)
- 【問 21】 $\tan\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)$ (答. $-\frac{2}{3}$)
- 【問 22】 $\arccos\frac{3}{5} - \arccos\frac{4}{5} = \arccos x$ (答. $x = \frac{24}{25}$)

関数電卓でも逆三角関数が使えることが必要です。答を電卓でチェックしてみよう！

逆双曲線関数

$$y = \sinh x \iff x = \operatorname{arsinh} y$$

$$y = \cosh x \iff x = \operatorname{arcosh} y \quad (2 \text{ 枝})$$

$$y = \tanh x \iff x = \operatorname{artanh} y$$

log を用いて表せる:

$$\operatorname{arsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arcosh} x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (2 \text{ 枝}), \quad x \geq 1$$

$$= \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

【問 23】 関数 $\operatorname{arsinh} x$ 、 $\operatorname{arcosh} x$ 、 $\operatorname{artanh} x$ のグラフを描け。

【問 24】 上の 3 式を導出せよ (逆関数を求めることによる練習になる)

【一変数関数の微分】

differential:微分 (の), differentiation:微分 (すること), derivative:導関数

- 定義 (ひき算して、わり算 (スカラー一倍) して、極限をとる)

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 公式

1. 和の微分公式 $(f + g)' = f' + g'$

2. 積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$
 $\Rightarrow (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

$\Rightarrow (f_1 f_2 f_3 f_4)' = \boxed{\quad + \quad + \quad + \quad}$

3. 商の微分公式 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

4. 合成関数の微分公式 (chain rule)

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

又は $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

5. 逆関数の微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{又は} \quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

【注】 公式 3 は 公式 2 と 公式 4 から導ける。

$$(f(x)/g(x))' = f'(x)h(g(x)), h(y) = \frac{1}{y} \text{ と見る}$$