

【初等関数の性質 2】

$\log x$

対数関数 (logarithmic function) は  
 指数関数の逆関数として定義される

$$y = e^x \quad (-\infty < x < \infty, y > 0)$$

$$x = \log y \quad (y > 0, -\infty < x < \infty)$$

一般の指数・対数関数

底 (base) が  $a (> 0)$  の指数・対数関数:

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

よく使われる底の値

底	名称	略記法
$e$	自然対数	$\log x, \ln x$
10	常用対数	$\log x$

数学では  $\log x$  は自然対数を指すものとする。

【読み方】  $\ln$  はナチュラルログ、エルエヌ、“ロ-ン”、...

対数関数の性質  $a, b, c, x, y > 0$  として

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

【問 1】上の 3 式を「指数の法則」

$a^x a^y = a^{x+y}$ 、 $(a^x)^y = a^{xy}$  から導け。

【問 2】下式の値を求めよ。 $(a > 0, b > 0)$

1.  $\log_a 1$       2.  $\log_a a$       3.  $\log_a \frac{1}{a}$

4.  $\log_{1/a} b$  を  $\log_a b$  で表せ

5.  $\log_b a$  を  $\log_a b$  で表せ

6.  $\log_{\sqrt{a}} b$  を  $\log_a b$  で表せ

7.  $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$  を  $\log_a b$  で表せ

8.  $\log_2 8$       9.  $\log_8 16$       10.  $\log_{\sqrt{27}} 81$

任意の底をもつ指数・対数関数は、 $e$  を底とする指数・対数関数であらわせる

$$a^x = e^{x \log_e a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}$$

逆三角関数

inverse trigonometric functions

微積 II の積分で必要となる

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq 1\right)$$

$$x = \arccos y \iff y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1)$$

$$x = \arctan y \iff y = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty\right)$$

【読み方】ア-ークサイン、ア-ークコサイン、ア-ークタンジェント

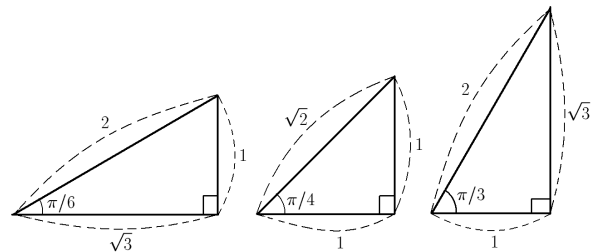
【注意】 $\sin^{-1} y$  や  $\text{Sin}^{-1} y$  は  $\frac{1}{\sin y}$  とまぎらわしいので、 $\arcsin y$  と書くことを勧める。arc は円弧の意味。

【注意】一価関数にするために、定義域と値域に制限が加えられている。式の変形をするときは、この制限に注意を払うことが大切。( Sin と sin の違い)

直角三角形との関係

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan 1$$



逆三角関数に関する問題

逆三角関数の問題は、三角関数の世界で熟知している関係 (加法定理など) を、逆三角関数を用いた関係に翻訳することで解ける。三角関数の基本が身につけていれば、あとは頭の体操に過ぎないので、解けるはずと信じて取り組んで下さい。

【問 3】以下の値を求めよ。

1.  $\arcsin \frac{1}{2}$       2.  $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$

3.  $\arccos \frac{1}{2}$       4.  $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$

5.  $\arctan 1$       6.  $\arctan (-1)$

7.  $\sin \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$       8.  $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$