

【初等関数の性質 1】

sin と cos

三角関数 : trigonometric function

- 周期 2π をもつ: $\pi = 3.14\dots$: 円周率
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned}\sin(x + 2n\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2n\pi) &= \cos x\end{aligned}$$

- 偶奇性

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x : \text{奇関数} \\ \cos(-x) &= \cos x : \text{偶関数}\end{aligned}$$

【問 1】以下の関数のグラフを描け

1. $\sin 2x$ 2. $\sin \frac{x}{2}$ 3. $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

- sin と cos の関係

ピタゴラスの定理 (三平方の定理) より

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- 三角関数の加法定理

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

【問 2】三平方の定理を証明せよ。易しいと思った人は、加法定理の幾何学的な証明にも挑戦してみよ。頭の体操のため、座標の概念を導入せず、三角比の定義と三角形の相似関係だけを用いて示してみよう。

【問 3】加法定理から半角公式、倍角公式、積を和になおす公式、和を積になおす公式、 \tan の加法定理、を導け。

【問 4】 $y = \sin^2 x$ と $y = \cos^2 x$ のグラフを描け。

【問 5】 $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ と $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ の値を求めよ。

【問 6】積 和の公式を駆使して左辺を変形し右辺を導け

- 1) $\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$
 2) $\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$
 $\cos^3 x, \cos^4 x$ についても同様の变形をしてみよ。

その他の三角関数

$$\text{タンジェント : } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned}\text{コタンジェント : } \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \\ \text{コセカント : } \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x} \\ \text{セカント : } \sec x &= \frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

【注意】“co” のつけ方の規則性は？

【問 7】関数 $\tan x, \cot x, \operatorname{cosec} x, \sec x$ のグラフを描け。

e^x

指数関数 : exponential function
 $2^3 = 8$ の 3 が指数 (exponent)

$$\begin{aligned}y &= e^x : \text{「イーの } x \text{ 乗」} \\ &= \exp x : \text{「イクスポーネンシャル } x \text{」}\end{aligned}$$

$e = 2.718\dots$: 自然対数の底

【問 8】 $y = \exp(-x)$ のグラフを描け。

双曲線関数

hyperbolic function

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \text{ハイパボリックサイン } x \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \text{ハイパボリックコサイン } x \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \text{ハイパボリックタンジェント } x\end{aligned}$$

【読み方】ハイパボリック (双曲線の) をハイパー (超) と縮めるのは避けたい。cosh を “コッシュ”、sinh を “シン (チ)” などと発音する人もいる。

【注意】 $(\sinh x)^n$ を $\sinh^n x$ と書く。

【問 9】関数 $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ のグラフを描け。

- \sinh と \cosh の関係 三角関数との相違は？

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

- 双曲線関数の加法定理 三角関数との相違は？

$$\begin{aligned}\sinh(\alpha \pm \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta \\ \cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta\end{aligned}$$

【問 10】上の 3 式 ($\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \sinh(\alpha \pm \beta) = \dots, \cosh(\alpha \pm \beta) = \dots$) を導け。