微分積分 II EI(b),MB(a,b) クラス 中間試験　問題・答案用紙　（全 6 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 電気電子情報工学科, 物質・生命化学科 1 年生対象, 担当教員 保倉・田嶋・小野田,　2019 年 12 月 13 日 1 限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートである。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま, 全ての配布物を提出せよ。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。
[答え方] 大問【1】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【2】,【3】,【4】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。（マークシートには対応する記入欄を設けていない。）
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には 0 を記入せよ。負符号 (−) が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0 を答えとするときの分母は 1 とせよ。

記入例：　$2 = \boxed{2} = \boxed{0}\boxed{2} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{2} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$,　$-3 = \boxed{-}\boxed{3} = \boxed{-}\boxed{0}\boxed{3} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{0}\boxed{1}}$　　$+\boxed{}\boxed{}$ に -3 を解答するには $+\boxed{-}\boxed{3}$

[注意] $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。
積分定数は断りなく c, c', c'', c_1, c_2, c_3, $\cdots$ 等と書き表すものとする。

【1】 小問 i)〜xiv) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5 点× 4 問=20 点。第 2〜4 頁に続く。)

i) $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{\boxed{^{1:}\ 0}\boxed{^{2:}\ 1}}{\boxed{^{3:}\ 4}}\,x^{\boxed{^{4:}\ 4}} + c$

答の求め方

$\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n$ より $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ である。これに $n = 3$ を代入すると、$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$ $\cdots\cdots$ (答)

ii) $\displaystyle\int \tan(3x)\,dx = \frac{\boxed{^{5:}\ -}\boxed{^{6:}\ 1}}{\boxed{^{7:}\ 3}}\log\left|\cos\left(\boxed{^{8:}\ 3}\,x\right)\right| + c$

答の求め方

$\int \tan(3x)\,dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}(\cos 3x)'}{\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = -\frac{1}{3}\log|\cos 3x| + c$ $\cdots\cdots$ (答)

iii) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2^x\,dx = \frac{\boxed{^{9:}\ 1}\boxed{^{10:}\ 5}}{\boxed{^{11:}\ 4}\log 2}$

答の求め方

$(a^x)' = a^x \log a$ より、 $\int a^x dx = a^x \frac{1}{\log a}$

$\int_{-2}^{2} 2^x\,dx = \left[2^x \frac{1}{\log 2}\right]_{-2}^{2} = (2^2 - 2^{-2})\frac{1}{\log 2} = (4 - \frac{1}{4})\frac{1}{\log 2} = \frac{15}{4\log 2}$ $\cdots\cdots$ (答)

iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + x^2 + \sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\boxed{^{12:}\ 3}}{\boxed{^{13:}\ 4}}\pi$

答の求め方

$\int_0^1 \frac{1+x^2+\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \left[\mathrm{Tan}^{-1}x + \mathrm{Sin}^{-1}x\right]_0^1 = \mathrm{Tan}^{-1}1 + \mathrm{Sin}^{-1}1 - \mathrm{Tan}^{-1}0 - \mathrm{Sin}^{-1}0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 0 - 0$
$= \frac{3}{4}\pi$ $\cdots\cdots$ (答)

科目名: 微分積分 II (中間試験)	試験日: 令和元年 12 月 13 日	出題者: 保倉・田嶋 ・小野田	学科　電気電子情報工学科　物質・生命化学科	学籍番号	氏名	得点 /20

【1】（第 1 頁からのつづき。5 点× 4 問=20 点)

v) $\displaystyle\int_1^3 x^2 \log x\,dx = \frac{\boxed{14:\ 8}\boxed{15:\ 1}\log 3 - \boxed{16:\ 2}\boxed{17:\ 6}}{9}$

答の求め方

部分積分法により

$\int x^2 \log x\,dx = \int (\frac{1}{3}x^3)' \cdot \log x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \int \frac{1}{3}x^3(\log x)'\,dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + c$

$\int_1^3 x^2 \log x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3\right]_1^3 = 9\log 3 - 3 - 0 + \frac{1}{9} = 9\log 3 - \frac{26}{9} = \frac{81\log 3 - 26}{9}$ ……(答)

vi) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \sqrt{\boxed{18:\ 7}}$

答の求め方

置換積分法により

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-1/2}\,(x^2+3)'dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-1/2}\,d(x^2+3) = \frac{1}{2}2(x^2+3)^{1/2} = \sqrt{x^2+3} + c$

$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+3}\right]_2^5 = \sqrt{28} - \sqrt{7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{7}$ ……(答)

vii) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \frac{\boxed{19:\ 1}}{\boxed{20:\ 4}}\pi - \frac{\boxed{21:\ 1}}{\boxed{22:\ 2}}$

答の求め方

部分積分法により

$\int x\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \int (\frac{1}{2}x^2)' \cdot \mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \int \frac{1}{2}x^2(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)'dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\int(1 - \frac{1}{1+x^2})dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x + c$

$\int_0^1 x\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - 0 + 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ……(答)

viii) $\displaystyle\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5\pi^2}{\boxed{23:\ 2}\boxed{24:\ 8}\boxed{25:\ 8}}$

答の求め方

置換積分法により

$\int \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \mathrm{Sin}^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \mathrm{Sin}^{-1}x \cdot \left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)'\,dx = \int \mathrm{Sin}^{-1}x\,d\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)^2 + c$

$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)^2\right]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{144} - \frac{4}{144}\right)\pi^2 = \frac{1}{2}\frac{5}{144}\pi^2 = \frac{5\pi^2}{288}$ ……(答)

【1】(第 2 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点)

ix) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx = \frac{\boxed{26:\ 6}\boxed{27:\ 3}\pi}{512}$　　[参考] n が偶数のとき $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$ が成り立つ。

答の求め方

$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx = \frac{(10-1)!!}{10!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9!!}{10!!\cdot 2}\pi = \frac{9\cdot7\cdot5\cdot3}{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2\cdot2}\pi = \frac{9\cdot7\cdot1\cdot1}{2\cdot8\cdot2\cdot4\cdot2\cdot2}\pi = \frac{63}{512}\pi$ $\cdots\cdots$ (答)

x) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \boxed{28:\ 3} - \boxed{29:\ 8}\log 2$

答の求め方

$t=\sqrt{x}$ とおくと $x=t^2$, $dx=2tdt$ なので,

$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1-t}{1+t}2tdt = 2\int \frac{-t^2+t}{t+1}dt = 2\int \left(-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt = 2\left(-\frac{1}{2}t^2+2t-2\log|t+1|\right)+c = -t^2+4t-4\log|t+1|+c$

$= -x+4\sqrt{x}-4\log(\sqrt{x}+1)+c$

$\int_0^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[-x+4\sqrt{x}-4\log(\sqrt{x}+1)\right]_0^9 = -9+4\sqrt{9}-4\log(\sqrt{9}+1)+0-0+0 = -9+12-4\log 4 = 3-8\log 2$ $\cdots\cdots$ (答)

xi) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \log \boxed{30:\ 3}$

答の求め方

教科書 p.84 の例 8 で説明された計算方法により $\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$ を導き、右辺の不定積分を利用して求める。

$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right| = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log 3 = \log 3$ $\cdots\cdots$ (答)

[別解]

教科書 p.84 の例 7 で説明された計算方法により $\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$ を導き、右辺の不定積分を利用して求める。

$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \left[\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \log\left|\tan\frac{\pi}{3}\right| - \log\left|\tan\frac{\pi}{6}\right| = \log\sqrt{3} - \log\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log 3 = \log 3$ $\cdots\cdots$ (答)

【1】(第 3 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点)

xii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{^{31:}\ 2}$

答の求め方

$t=\sqrt{x}$ とおくと、$x=t^2$ より $dx=2tdt$ である。したがって、

$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}2tdt = 2\int_0^\infty e^{-t}dt = 2\left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 2\,(-0+1) = 2\ \cdots\cdots$ (答)

[補足説明]

与式は被積分関数が $x=0$ で∞に発散すること、および、積分区間の上端が∞であることにより広義積分であるが、計算の遂行において特段の注意を払うべきことはないので、わざわざ $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 等の形に書き直してから計算を行う必要はない。

xiii) 6 個の広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}\ \int_0^1 \frac{dx}{x},\ \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}},\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2/3}}\ \int_1^\infty \frac{dx}{x},\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ のうち、収束するものは $\boxed{^{32:}\ 2}$ 個である。また。収束するものの積分値の和は $\boxed{^{33:}\ 5}$ である。

答の求め方

広義積分の値を計算すると、$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \left[3x^{1/3}\right]_0^1 = 3,\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \left[-2x^{-1/2}\right]_1^\infty = 2$ の 2 個の広義積分は有限の値を持ち、他の 4 個の広義積分は無限大に発散することがわかる。値の和は $3+2=5$ である。

xiv) 曲線 C : $y=2\log x+3\quad(0<a\le x\le b)$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\boxed{^{34:}\ 0}x^2+\boxed{^{35:}\ 0}x+\boxed{^{36:}\ 1}+\boxed{^{37:}\ 0}x^{-1}+\boxed{^{38:}\ 4}x^{-2}}\,dx$ である。

答の求め方

曲線 $y=f(x)\quad(a\le x\le b)$ の長さ L は、$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\,dx$ で与えられる。 $f(x)=2\log x+3,\ f'(x)=\frac{2}{x}$ を代入すると、

$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+4x^{-2}}\,dx=\int_a^b\sqrt{0x^2+0x+1+0x^{-1}+4x^{-2}}\,dx\ \cdots\cdots$ (答) を得る。

【2】 $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin\ x}^{\cos\ x} f(t)\,dt$ を求めよ (10 点)

解答例

$F(t) = \int f(t)dt$ とすると、$F'(t) = f(t)$ なので、

$g(x) = \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_{t=\sin\ x}^{t=\cos\ x} = \frac{dF(\cos\ x)}{dx} - \frac{dF(\sin\ x)}{dx} = \frac{dF(\cos\ x)}{d(\cos\ x)} \cdot \frac{d(\cos\ x)}{dx} - \frac{dF(\sin\ x)}{d(\sin\ x)} \cdot \frac{d(\sin\ x)}{dx} = F'(\cos x)(-\sin x) - F'(\sin x)\cos x$

$= -f(\cos x)\sin x - f(\sin x)\cos x$ $\cdots\cdots$ (答)

【3】 極座標で $r = 1 - \cos\theta$,　$0 \le \theta \le 2\pi$ と表される x-y 平面上の曲線 C について下記の小問 i), ii) に答えよ。(合計 10 点)

i) 曲線 C の概形を描け。

ii) 曲線 C の長さ L を求めよ。

解答例

i) 下記の表の 8 点を正確に通過するように描くこと。 $\cdots$ 5 点

θ	0	$\frac{\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

ii) (弧長) $= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$

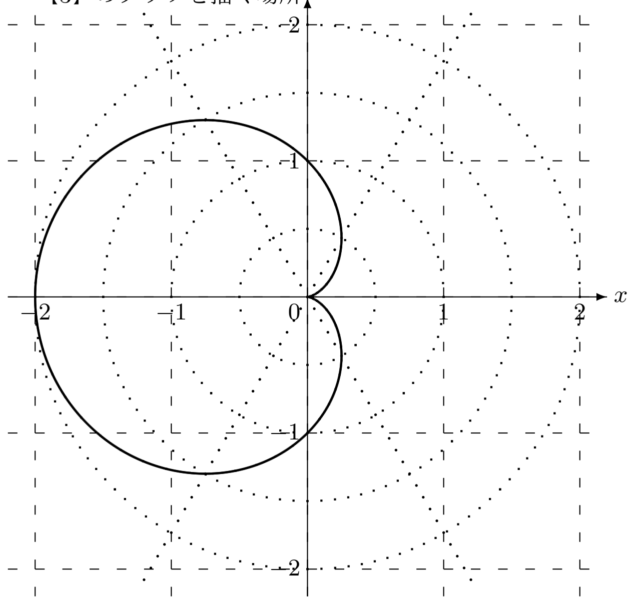
$= 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta$

$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$= 2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$

$= 8$ $\cdots\cdots$ (答)$\cdots$ 5 点

【3】のグラフを描く場所



【4】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ を求めよ。(10 点)

解答例

$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ とおいて A,B,C を定めると、

$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

$1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$

上式が任意の x に対して恒等的に成立するための必要十分条件は $A+B=0,\ 2A+B+C=0,\ A=1$ である。

この連立方程式を解いて A, B, C の値を求めると、

$A=1,\ B=-1,\ C=-1$ である。

与式の被積分関数を部分分数分解した形に書き直すと不定積分が容易に求まる。

$I = \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$

$\quad = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \quad \cdots\cdots$ (答)

$\quad = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c \quad \cdots\cdots$ (答)

【補足説明】

$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$ という分解は可能であるが、右辺第 2 項は不定積分を求めにくい形をしているので、下手な分解の仕方である。

$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B'(x+1)+C'}{(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B'}{x+1} + \frac{C'}{(x+1)^2}$ であるから、最初からこちらの右辺の形で分解すれば右辺の全項の不定積分が容易に求まる。

【補足説明】$\int \cdots dx$ は括弧の役目は果たさない。したがって、$\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} dx$ と書いてはならず、$\int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$ と書かねばならない。