福井大学工学部 電気電子情報工学科, 物質・生命化学科 1 年生対象, 担当教員 保倉・林・田嶋・小野田,　2019 年 2 月 8 日 1 限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートである。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま, 全ての配布物を提出せよ。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。
[答え方] 大問【1】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【2】,【3】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。（マークシートには対応する記入欄を設けていない。）
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には 0 を記入せよ。負符号 (−) が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0 を答えとするときの分母は 1 とせよ。

記入例： $2 = \boxed{2} = \boxed{0}\boxed{2} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{2} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$, $-3 = \boxed{-}\boxed{3} = \boxed{-}\boxed{0}\boxed{3} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{0}\boxed{1}}$　$+\boxed{}\boxed{}$ に -3 を解答するには $+\boxed{-}\boxed{3}$

[注意 1] 積分定数は断りなく c, c', c'', c_1, c_2, c_3, $\cdots$ 等と書き表すものとする。
[注意 2] $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)〜xiv) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5 点× 4 問=20 点。第 2〜4 頁に続く。)

i) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x^3}\,dx = \frac{\boxed{1:\ 6}\boxed{2:\ 2}}{5}$

答の求め方

$\int_1^4 x^{3/2}dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_1^4 = \frac{2}{5}\left(4^{5/2} - 1^{5/2}\right) = \frac{2}{5}\left(2^5 - 1\right) = \frac{2}{5}\cdot 31 = \frac{62}{5}$ ······(答)

ii) $\displaystyle\int_1^4 2^x\,dx = \frac{\boxed{3:\ 1}\boxed{4:\ 4}}{\log 2}$

答の求め方

$\int_1^4 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_1^4 = \frac{2^4-2^1}{\log 2} = \frac{16-2}{\log 2} = \frac{14}{\log 2}$ ······(答)

iii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{\boxed{5:\ 1}\boxed{6:\ 2}}$

答の求め方

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_1^{\sqrt{3}} = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} - \mathrm{Tan}^{-1}1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ ······(答)

iv) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\boxed{7:\ 1}\boxed{8:\ 2}}$

答の求め方

$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\mathrm{Sin}^{-1}x\right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ ······(答)

【1】(第 1 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点)

v) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \log \frac{\boxed{9:\ 6}}{\boxed{10:\ 5}}$

答の求め方

$\int_0^2 \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int_0^2 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \left[\log|x+2| - \log|x+3|\right]_0^2 = \log 4 - \log 5 - \log 2 + \log 3 = \log \frac{4\cdot 3}{5\cdot 2} = \log \frac{6}{5}$ ……(答)

vi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(\boxed{11:\ 1} + \sqrt{\boxed{12:\ 2}}\right)$

答の求め方

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の不定積分が $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ であることを覚えているならば、
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log 1 = \log\left(1+\sqrt{2}\right)$ ……(答)
記憶に不安があるときは、微分して確認すればよい：

$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left\{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

不定積分が記憶にないときは、2 乗の項の係数が正である 2 次式の平方根を含む有理関数の不定積分を求める処方としてよく使われる置換法 ($t = \sqrt{x^2+1} + x$、$x = \tan\theta$、など）で求めることになる。

vii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \boxed{13:\ 2} - \sqrt{\boxed{14:\ 2}}$　　(計算方法によっては $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ が役立つだろう。)

答の求め方

$F(x) = \int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\, dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + c$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 1 - \sqrt{2} - (0-1) = 2 - \sqrt{2}$ ……(答)

[別解法 1]

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと、$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$、$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$F(x) = \int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + c = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = -\frac{2}{\tan\frac{\pi}{8}+1} + \frac{2}{\tan 0+1} = -\frac{2}{\sqrt{2}-1+1} + 2 = -\sqrt{2} + 2$ ……(答)

[別解法 2]

$u = \frac{\pi}{2} - x$ とおくと $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-du}{1+\cos u} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\cos u} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \left[\tan\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{8} = 1 - (\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2}$ ……(答)

【1】(第 2 頁からのつづき。5 点× 4 問=20 点)

viii) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \log \boxed{15:\ 9}$

答の求め方

$t=\sqrt{x}$ とおくと $x=t^2$、$dx=2tdt$

$F(x)=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int \frac{2tdt}{t^2+t}=\int \frac{2dt}{t+1}=2\log|t+1|+c=2\log\left|\sqrt{x}+1\right|+c$

$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=F(4)-F(0)=2\log 3-2\log 1=2\log 3=\log 3^2=\log 9\ \cdots\cdots$ (答)

被積分関数が $x\to+0$ で ∞ に発散するため、この積分は広義積分である。それを明示して計算を進めたいならば、

$\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}=F(4)-\lim_{\epsilon\to+0}F(\epsilon)=F(4)-F(0)=2\log 3-2\log 1=\log 9\ \cdots\cdots$ (答)

ix) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx=\frac{\log 2}{\boxed{16:\ 8}}+\frac{1}{\boxed{17:\ 1}\boxed{18:\ 6}}$

答の求め方

$F(x)=\int \frac{\log x}{x^3}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)'\log x\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\log x-\int\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)(\log x)'\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\log x-\int\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)\frac{1}{x}\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^{-2}\log x+\frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\log x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-2}+c=-\frac{\log x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c$

以下、$c=0$ にとる。

$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\log x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)=-0-0=0$　　($\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ はロピタルの定理を使って示せる。)

$\int_2^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx=F(\infty)-F(2)=0-\left(-\frac{\log 2}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{4\cdot 2^2}\right)=\frac{\log 2}{8}+\frac{1}{16}\ \cdots\cdots$ (答)

x) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x} f(t)dt=\boxed{19:\ 0}\boxed{20:\ 0}\,f(x)+\boxed{21:\ -}\boxed{22:\ 2}\,f(2x)+\boxed{23:\ 0}\boxed{24:\ 3}\,f(3x)$

答の求め方

$F'(x)=f(x)$ とすると、

$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x} f(t)dt=\frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_{2x}^{3x}=\frac{d}{dx}\left\{F(3x)-F(2x)\right\}=\frac{d}{dx}F(3x)-\frac{d}{dx}F(2x)=\frac{dF(3x)}{d(3x)}\cdot\frac{d(3x)}{dx}-\frac{dF(2x)}{d(2x)}\cdot\frac{d(2x)}{dx}=f(3x)\cdot 3-f(2x)\cdot 2$

$=-2f(2x)+3f(3x)\ \cdots\cdots$ (答)

xi) xy 平面上の曲線 $y=\sqrt{x^3}$　$\left(\frac{5}{9}\le x\le\frac{32}{9}\right)$ の長さは $\boxed{25:\ 7}$ である。

答の求め方

(長さ) $=\int_{\frac{5}{9}}^{\frac{32}{9}}\sqrt{1+\left\{(x^{3/2})'\right\}^2}\,dx=\int_{\frac{5}{9}}^{\frac{32}{9}}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{5}{9}}^{\frac{32}{9}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{3}{2}\int_{\frac{5}{9}}^{\frac{32}{9}}\sqrt{x+\frac{4}{9}}\,dx=\left[\left(x+\frac{4}{9}\right)^{3/2}\right]_{\frac{5}{9}}^{\frac{32}{9}}$

$=4^{3/2}-1^{3/2}=8-1=7\ \cdots\cdots$ (答)

【1】（第 3 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点）

xii) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy = \boxed{^{26:}\ 5}\boxed{^{27:}\ 2}$　但し $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 3,\ 2\le y\le 4\}$ とする。

答の求め方

領域 D の定義から明らかに、与えられた二重積分は下記の累次積分として計算できることが分かる。

(与式) $=\int_1^3 dx\int_2^4 x^2ydy=\int_1^3 x^2dx\cdot\int_2^4 ydy=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3\cdot\left[\frac{1}{2}y^2\right]_2^4=\frac{26}{3}\cdot\frac{12}{2}=13\cdot 4=52$ ……(答)

xiii) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy = \frac{2}{\boxed{^{28:}\ 1}\boxed{^{29:}\ 5}}$　但し $D=\{(x,y)\,|\,x\le y,\ -x\le y,\ y\le 1\}$ とする。

答の求め方

領域 D をグラフに描いてみると（本解答例においてはグラフを省略する）、D は下記のようにも表せることが分かる。

$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ -y\le x\le y\}$

ここで、$0\le y\le 1$ で $\{x\,|\,-y\le x\le y\}$ は空集合ではない。従って与えられた二重積分は下記の累次積分として計算できることが分かる。

(与式) $=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} x^2ydx=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3y\right]_{x=-y}^{x=y}dy=\int_0^1\frac{2}{3}y^4\,dy=\left[\frac{2}{15}y^5\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{15}$ ……(答)

xiv) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy = \frac{\sqrt{2}}{\boxed{^{30:}\ 3}\boxed{^{31:}\ 0}}$　但し $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\le y,\ -x\le y,\ x^2+y^2\le 1\right\}$ とする。

答の求め方

領域 D をグラフに描いてみると（本解答例においてはグラフを省略する）、D は極座標を使い下記のようにも表せることが分かる。

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ 0\le r\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\right\}$

従って与えられた二重積分は下記の累次積分として計算できることが分かる。$dxdy=rdrd\theta$ に注意して、

(与式) $=\int_0^1 dr\cdot r\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^1\,d\theta=\int_0^1 r^4dr\cdot\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{5}r^5\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=3\pi/4}$

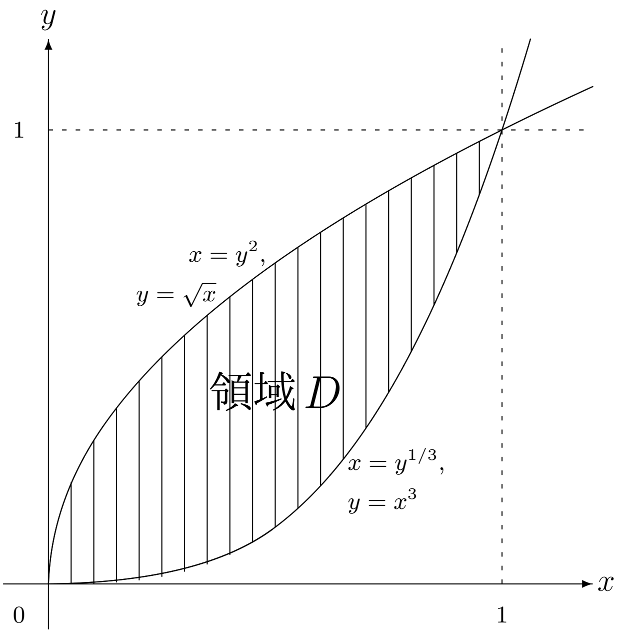
$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{30}$ ……(答)

【2】 $I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x, y)\, dx$ とする。以下の小問に答えよ。(15 点)

(1) 累次積分として定義された I が xy 平面上の領域 D での二重積分と値が等しくなる、即ち、 $I = \iint_{\mathrm{D}} f(x, y) dxdy$ が成り立つような領域 D を右のグラフ描画区画に描け。(5 点)

(2) 累次積分 I の積分順序を変更せよ。(5 点)

(3) $f(x, y) = ye^{7x^2-2x^7}$ のとき I を求めよ。(5 点)



解答例

(1) 与えられた累次積分の数式より、

$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y^{1/3} \right\}$

と表せることが分かる。従って D は右のグラフで縦線を密に施した部分である。

(2) 右のグラフより

$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$

とも表せることが分かる。これより I は下記の累次積分で表されることが分かる。

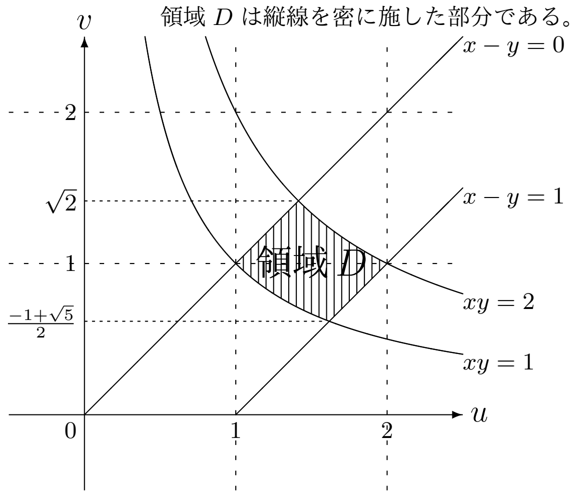
$I = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ $\cdots\cdots$ (答)

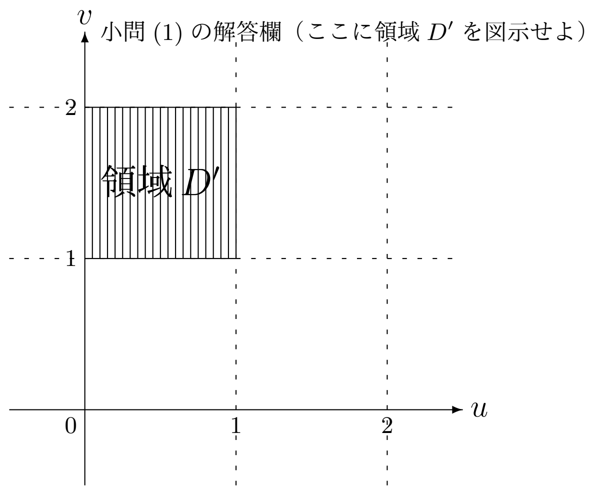
(3)

$I = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} ye^{7x^2-2x^7} dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 e^{7x^2-2x^7} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ (\sqrt{x})^2 - (x^3)^2 \right\} e^{7x^2-2x^7} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - x^6 \right) e^{7x^2-2x^7} dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{14} \left(7x^2 - 2x^7 \right)' e^{7x^2-2x^7} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14} \left[e^{7x^2-2x^7} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14} \left(e^5 - e^0 \right) = \frac{e^5-1}{28}$ $\cdots\cdots$ (答)

【3】 $I = \iint_D xy(x^2 - y^2)dxdy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq x - y \leq 1,\ 1 \leq xy \leq 2\}$ とする。領域 D を図示すると左下のグラフになる。また、$u = x - y,\ v = xy$ とし、(x, y) が領域 D を動くとき (u, v) の動く領域を D' とする。以下の小問に答えよ。(15 点)





(1) 領域 D' を右上のグラフ描画区画に描け。(5 点)

(2) ヤコビアン $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ を求めよ。但し、答は u, v を使わず、x, y で表せ。(5 点)

(3) I を求めよ。(5 点)　【補足説明】$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \dfrac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ が成立する。この関係式を (その証明を答案に記すことなく) 使用してよい。

解答例

(1) 右上の図中の縦線を密に施した部分が領域 D' である。

(2) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix} = x + y$ ……(答)

(3) $I = \iint_{D'} xy(x^2 - y^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_0^1 du \int_1^2 xy(x^2 - y^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv = \int_0^1 du \int_1^2 xy(x^2 - y^2)\frac{1}{x+y} dv = \int_0^1 du \int_1^2 xy(x - y)dv$
$= \int_0^1 du \int_1^2 uvdv = \int_0^1 udu \int_1^2 vdv = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{u=0}^{u=1} \cdot \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v=1}^{v=2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ ……(答)

[別解法 **1**]

$I = I_1 + I_2$,

$I_1 = \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 dy \int_{1/y}^{y+1} xy(x^2 - y^2)dx = \cdots = \frac{11}{24}$,

$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_y^{2/y} xy(x^2 - y^2)dx = \cdots = \frac{7}{24}$

$I = \frac{11}{24} + \frac{7}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ ……(答)

[別解法 **2**]

$I = I_1 + I_2 + I_3$,

$I_1 = \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{1/x}^x xy(x^2 - y^2)dy = \cdots = \frac{5}{48}$,

$I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{(1+\sqrt{5})/2} dx \int_{1/x}^{2/x} xy(x^2 - y^2)dy = \cdots = \frac{3}{2} - \frac{9\sqrt{5}}{16}$,

$I_3 = \int_{(1+\sqrt{5})/2}^2 dx \int_{x-1}^{2/x} xy(x^2 - y^2)dy = \cdots = \frac{9\sqrt{5}}{16} - \frac{41}{48}$

$I = \frac{5}{48} + \frac{3}{2} - \frac{41}{48} = \frac{3}{4}$ ……(答)