EI,MB 学科 微分積分 II(a,b)　中間試験　問題・答案用紙　（全 6 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 電気電子情報工学科, 物質・生命化学科 1 年生対象, 担当教員 保倉・林・田嶋・小野田,　2018 年 12 月 7 日 1 限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートである。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま, 全ての配布物を提出せよ。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。
[答え方] 大問【1】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【2】,【3】,【4】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。（マークシートには対応する記入欄を設けていない。）
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には 0 を記入せよ。負符号 (−) が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0 を答えとするときの分母は 1 とせよ。

記入例：　$2=\boxed{2}=\boxed{0}\boxed{2}=\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}=\dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$,　$-3=\boxed{-}\boxed{3}=\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}=\dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$0=\boxed{0}=\boxed{0}\boxed{0}=\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}=\dfrac{\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{0}\boxed{1}}$　　$+\boxed{}\boxed{}$ に -3 を解答するには $+\boxed{-}\boxed{3}$

[注意 1] 積分定数は断りなく $c, c', c'', c_1, c_2, c_3, \cdots$ 等と書き表すものとする。
[注意 2] $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)〜xiv) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5 点× 4 問=20 点。第 2〜4 頁に続く。)

i) $\displaystyle\int \sin(5x)\,dx = \frac{\boxed{1:\ -}\boxed{2:\ 1}}{\boxed{3:\ 5}}\cos(5x) + c$

<u>答の求め方</u>

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ より、$\int \sin(5x)dx = \int \sin(5x)d(5x)\cdot\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}\cos(5x)+c$ $\cdots\cdots$(答)

ii) $\displaystyle\int_0^1 5^x\,dx = \boxed{4:\ 0}\log 5 + \frac{\boxed{5:\ 4}}{\log 5}$

<u>答の求め方</u>

a が正の実数のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$ より、$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\log 5} + c$, $\int_0^1 5^x dx = \frac{5^1}{\log 5} - \frac{5^0}{\log 5} = \frac{4}{\log 5}$ $\cdots\cdots$(答)

iii) $\displaystyle\int x\log x\,dx = \frac{1}{\boxed{6:\ 2}}x^{\boxed{7:\ 2}}\log x - \frac{1}{\boxed{8:\ 4}}x^{\boxed{9:\ 2}} + c$

<u>答の求め方</u>

部分積分法により、(与式) $= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2(\log x)'\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x dx =$
$\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + c$ $\cdots\cdots$(答)

iv) $\displaystyle\int_1^{10000}\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx = \frac{\boxed{10:\ 9}\boxed{11:\ 9}}{50}$,　　$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx = \boxed{12:\ 2}$

<u>答の求め方</u>

$F(x) = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-1/2} + c$ とすると、(左側の積分) $= F(10000) - F(1) = -\frac{2}{100} + \frac{2}{1} = \frac{99}{50}$ $\cdots\cdots$(答)

(右側の積分) $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x) - F(1) = 0 + \frac{2}{1} = 2$ $\cdots\cdots$(答)

科目名: 微分積分 II (中間試験)	試験日: 平成 30 年 12 月 7 日	出題者: 保倉・林・田嶋・小野田	学科　電気電子情報工学科　物質・生命化学科	学籍番号	氏名	得点　/20

【1】（第 1 頁からのつづき。5 点× 4 問=20 点)

v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{\pi}{\boxed{13:\ 1}\boxed{14:\ 2}}$

<u>答の求め方</u>

$F(x) = \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \mathrm{Tan}^{-1}\left(e^x\right) + c$　　　$e^{\frac{\log 3}{2}} = e^{(\log 3)\cdot\frac{1}{2}} = \left(e^{\log 3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ であることを使って、

(与式) $= F(\frac{\log 3}{2}) - F(0) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(e^{\frac{\log 3}{2}}\right) - \mathrm{Tan}^{-1}(e^0) = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} - \mathrm{Tan}^{-1} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ $\cdots\cdots$ (答)

vi) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \log \frac{\boxed{15:\ 9}}{\boxed{16:\ 8}}$

<u>答の求め方</u>

$F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} = \log|x+1| - \log|x+2| + c$

(与式) $= F(2) - F(1) = \log 3 - \log 4 - \log 2 + \log 3 = \log \frac{3\cdot 3}{4\cdot 2} = \log \frac{9}{8}$ $\cdots\cdots$ (答)

vii) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1} x\,dx = \left(\boxed{17:\ 0}x^2 + \boxed{18:\ 1}x + \boxed{19:\ 0}\right)\mathrm{Sin}^{-1} x + \sqrt{\boxed{20:\ -}x^2 + \boxed{21:\ 0}x + \boxed{22:\ 1}} + c$

<u>答の求め方</u>

部分積分法により (与式) $= \int x' \,\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int x\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)'\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + c = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} + c =$

$x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\sqrt{1-x^2} + c = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$ $\cdots\cdots$ (答)

viii) $\displaystyle\int_2^{\infty} x\left(e^{-x} + e^{-x^2}\right)dx = \frac{\boxed{23:\ 3}}{\boxed{24:\ 1}}e^{-2} + \frac{\boxed{25:\ 1}}{\boxed{26:\ 2}}e^{-4}$

<u>答の求め方</u>

$F(x) = \int x\,e^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int x'(-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$

$G(x) = \int xe^{-x^2}dx = \int e^{-x^2}\frac{1}{2}\,d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$

(与式) $= F(\infty) - F(2) + G(\infty) - G(2) = 0 + 3e^{-2} + 0 + \frac{1}{2}e^{-4} = 3e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-4}$ $\cdots\cdots$ (答)

【1】（第 2 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点）

ix) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^8 x\,dx = \frac{\boxed{27:\ 3}\ \boxed{28:\ 5}}{\boxed{29:\ 6}\ \boxed{30:\ 4}}\pi$　　[参考] n が偶数のとき $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$ が成り立つ。

答の求め方

$\int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx = \frac{(8-1)!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7!!}{8!!\cdot 2}\pi = \frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2\cdot2}\pi = \frac{7\cdot5\cdot1\cdot1}{8\cdot2\cdot4\cdot2\cdot2}\pi = \frac{35}{256}\pi$

(与式) $= \int_0^{2\pi}\cos^8 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^8 x\,dx + \int_{\pi}^{3\pi/2}\cos^8 x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos^8 x\,dx$

$= \int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos^8\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_0^{\pi/2}\cos^8(x+\pi)\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos^8\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx$

$= \int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx + \int_0^{\pi/2}\sin^8 x\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx + \int_0^{\pi/2}\sin^8 x\,dx$

$= 4\int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx = 4\frac{35}{256}\pi = \frac{35}{64}\pi$ $\cdots\cdots$(答)

x) $\displaystyle\int_2^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \log\frac{\boxed{31:\ 3}}{\boxed{32:\ 2}}$

答の求め方

$t=\sqrt{x+2}$ とおくと $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+2}}$, $x+1 = t^2-1$ なので,

$F(x) = \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \int\frac{2dt}{t^2-1} = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \log|t-1| - \log|t+1| + c = \log|\sqrt{x+2}-1| - \log|\sqrt{x+2}+1| + c$

(与式) $= F(7)-F(2) = \log|\sqrt{7+2}-1| - \log|\sqrt{7+2}+1| - \log|\sqrt{2+2}-1| + \log|\sqrt{2+2}+1|$

$= \log|3-1| - \log|3+1| - \log|2-1| + \log|2+1| = \log 2 - \log 4 - \log 1 + \log 3 = \log\frac{2\cdot3}{4\cdot1} = \log\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$(答)

xi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x} = \log\left(\boxed{33:\ 1} + \sqrt{\boxed{34:\ 2}}\right)$　　[参考] 解法によっては公式 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ が役立つだろう。

答の求め方

$F(x) = \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x)}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\log(1+\sin x) - \frac{1}{2}\log(1-\sin x) + c$

(与式) $= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\log(1+0) + \frac{1}{2}\log(1-0) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2}\log\left\{\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right\} = \log\left(1+\sqrt{2}\right)$ $\cdots\cdots$(答)

[別解]

$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと、$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$、$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$F(x) = \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \int\frac{dt}{t+1} - \int\frac{dt}{t-1} = \log|t+1| - \log|t-1| + c = \log|\tan\frac{x}{2}+1| - \log|\tan\frac{x}{2}-1| + c$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ を使うと $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$ を得る。

(与式) $= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \log\sqrt{2} - \log(2-\sqrt{2}) = \log\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \log\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \log\frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \log(1+\sqrt{2})$ $\cdots\cdots$(答)

【1】（第 3 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点）

xii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+65} = \frac{\pi}{\boxed{35:\ 7}}$

答の求め方

$t = x+4$ とすると、$dt = dx$ が成り立ち、$-\infty < x < \infty$ は $-\infty < t < \infty$ に対応する。

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+65} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+4)^2+49} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+7^2} = \frac{1}{7}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\frac{t}{7}\right)}{\left(\frac{t}{7}\right)^2+1} = \frac{1}{7}\left[\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{t}{7}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{7}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{7}$ ……(答)

xiii) 関数 $F(\alpha,\beta)$ を、広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{|x-1|^{\alpha}\,|x-2|^{\beta}}$ が収束するとき $F(\alpha,\beta)=1$、発散するとき $F(\alpha,\beta)=0$ と定義する。

このとき、　$F(1,1) = \boxed{36:\ 0}$,　　$F\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \boxed{37:\ 1}$,　　$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \boxed{38:\ 0}$,　　$F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right) = \boxed{39:\ 1}$　である。

答の求め方

$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{|x-1|^{\alpha}\,|x-2|^{\beta}}$ と表記すると、

$\int_0^{\infty} f(x;\alpha,\beta)dx = \int_0^{\frac{3}{2}} f(x;\alpha,\beta)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x;\alpha,\beta)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\infty} f(x;\alpha,\beta)dx$

$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x;\alpha,\beta)dx$ は $\alpha < 1$ のとき収束し、そうでないとき発散する。

$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x;\alpha,\beta)dx$ は $\beta < 1$ のとき収束し、そうでないとき発散する。

$\int_{\frac{5}{2}}^{\infty} f(x;\alpha,\beta)dx$ は $x \gg 2$ で $f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{x^{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\beta}} \approx \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$ なので

$\alpha+\beta > 1$ のとき収束し、そうでないとき発散する。

これらのことを使って答を得ることができる。

xiv) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{3x} \cos\left(t^2\right)\, dt$ のとき、$g(\sqrt{\pi}) = \boxed{40:\ -}\boxed{41:\ 5}$ である。

答の求め方

$F'(t) = \cos\left(t^2\right)$ とすると、

$g(x) = \frac{d}{dx}\left\{F(3x) - F(2x)\right\} = \frac{dF(3x)}{d(3x)}\cdot\frac{d(3x)}{dx} - \frac{dF(2x)}{d(2x)}\cdot\frac{d(2x)}{dx} = 3F'(3x) - 2F'(2x) = 3\cos\left(9x^2\right) - 2\cos\left(4x^2\right)$

$g(\sqrt{\pi}) = 3\cos 9\pi - 2\cos 4\pi = 3\cos\pi - 2\cos 0 = -3-2 = -5$ ……(答)

[補足説明] この問題のキーポイントは、不定積分 $\int\cos(t^2)dt$ を求める必要がないということです。毎年これの類題を出題していますが、その答案を採点していてよく見かける誤答は、この問題で言えば、$\int\cos(t^2)dt \overset{誤}{=} \frac{1}{2t}\sin(t^2)+c$ として計算を進めるものです。しかし、右辺を微分すると $\cos(t^2) - \frac{1}{2t^2}\sin(t^2)$ となり、$\cos(t^2)$ に等しくないことは容易に分かります。このような誤った計算を行わないようにするには、まず第一に、不定積分は一般には求まらないものだという積分の学習において心に留めておくべき基本的な問題意識を認識することが肝心です。第二には、置換積分法を完全に理解することが肝心です。$\int\cos(t^2)dt = \int\cos(t^2)\frac{dt}{d(t^2)}d(t^2) = \int\frac{1}{2t}\cos(t^2)d(t^2)$ という置換積分のあと、被積分関数の一部分の $\frac{1}{2t}$ を積分の外に出すという誤った式変形を行うとこのような誤った不定積分結果が得られるのですが、暗算で不定積分を求めようとするうちに、そういう誤りを犯しているのだと思われます。

【2】 $I_n = \int x^n \sin x\, dx$ とする。$n \geq 2$ のとき I_n を I_{n-2} を用いて表す漸化式を求めよ。(10 点)

解答例

部分積分法により

$I_n = \int x^n (-\cos x)'\, dx$

$= -x^n \cos x + \int (x^n)' \cos x\, dx$　($\because$ 部分積分法)

$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx \cdots$ ここ迄で 5 点　$\cdots\cdots$ (注意) 積分の前の因子 n を $\frac{1}{n}$ と間違える答案が少なくありませんでした。

$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} (\sin x)'\, dx$

$= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n \int (x^{n-1})' \sin x\, dx$　($\because$ 部分積分法)

$= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x\, dx$

$= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2} \cdots$ ここ迄で 10 点

$\therefore\ I_n = nx^{n-1} \sin x - x^n \cos x - n(n-1) I_{n-2}\ \cdots\cdots$ (答)

大問 [2] と [4] の採点では、部分点を臨機応変に与える。例えば「計算ミスをしなければ正しい答を得たと思われる答案には、満点の 10 点から計算ミス 1 件につき 2 点減点する」のようなルールを採点者毎に定めて採点を行う。

【3】 極座標で $r = 1 - \sin\theta,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ と表される x-y 平面上の曲線 C について下記の小問 i), ii) に答えよ。(合計 10 点)

i) 曲線 C の概形を描け。(5 点)

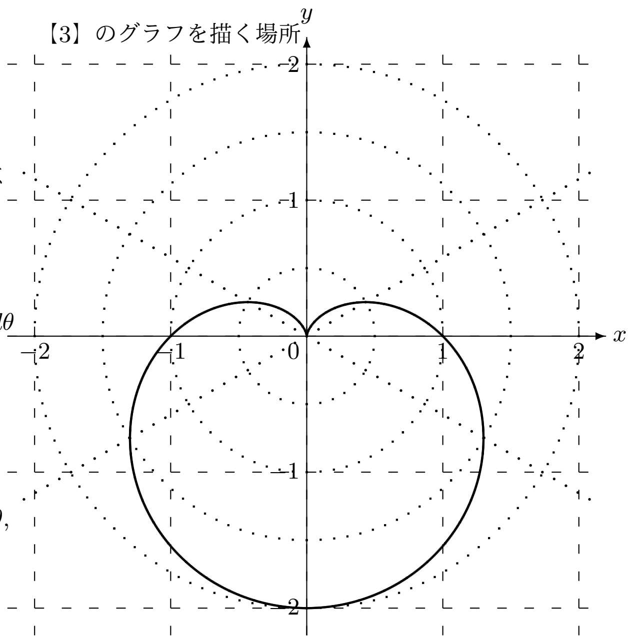
ii) 曲線 C の第一象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$ の領域) にある部分の長さ L を求めよ。(5 点)

解答例

i) 下記の表の 8 点を正確に通過するように描くこと。

θ	0 π	$\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
r	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2

採点基準の一例： 概形 (全ての θ で r が一価を持つ) に 1 点。概形の正誤と無関係に、上表の 8 点の各々をほぼ通過することに 0.5 点。合計 5 点。



ii) (弧長) $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\, d\theta \cdots$ ここ迄で (積分区間の正誤によらず)1 点

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\sin\theta}\, d\theta \cdots$ ここ迄で、積分区間が正しいと 3 点、誤りなら 2 点

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \cdot \frac{1-\cos\theta}{2}}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$= 2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\ \cdots\cdots$ (答)$\cdots$ ここ迄で 5 点

$= 2(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}\ \cdots\cdots$ (答)

[別解法] (弧長) $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ に $x = r\cos\theta = (1 - \sin\theta)\cos\theta$,

$y = r\sin\theta = (1 - \sin\theta)\sin\theta$ を代入して答を求めるのも良い答え方である。

[積分の別の求め方] $I = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}}{\sqrt{1+\sin\theta}}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1+s}} = \sqrt{2}\left[2\sqrt{1+s}\right]_{s=0}^{s=1} = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 2) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$

【4】 $I = \int \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,dx$ を求めよ。ただし $x > 0$ とする。　　ヒント： まず、$t = x\sqrt{x}$ とおいて置換積分するとよい。(10 点)

解答例

$t = x\sqrt{x}$ とおくと

$\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}dt$

$\sqrt{x^3+1} = \sqrt{t^2+1}$

$\therefore\ I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \cdots$ ここ迄で 4 点

$u = \sqrt{t^2+1} + t$ とおくと　(別の置換による解法も後で述べる。)

$t^2 + 1 = u^2 - 2ut + t^2 \quad \therefore \quad t = \frac{u^2-1}{2u}$

$\sqrt{t^2+1} = u - t = \frac{u^2+1}{2u}$

$dt = \frac{u^2+1}{2u^2}du$

$\therefore I = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{u^2+1}{2u^2}}{\frac{u^2+1}{2u}}du$

$= \frac{2}{3}\int \frac{du}{u}$

$= \frac{2}{3}\log|u| + c$

$= \frac{2}{3}\log\left|\sqrt{t^2+1}+t\right| + c \cdots$ ここ迄で 9 点

$= \frac{2}{3}\log\left|\sqrt{x^3+1}+x\sqrt{x}\right| + c$

$\therefore I = \frac{2}{3}\log\left(\sqrt{x^3+1}+x\sqrt{x}\right) + c \quad \cdots\cdots$ (答)$\cdots$ ここ迄で 10 点

[別解法 1]

$u = \sqrt{t^2+1} - t$ とおいた場合は、

$t = -\frac{u^2-1}{2u}, \quad \sqrt{t^2+1} = \frac{u^2+1}{2u}, \quad dt = -\frac{u^2+1}{2u^2}du$

$I = -\frac{2}{3}\int \frac{du}{u} \quad = -\frac{2}{3}\log\left|\sqrt{t^2+1}+t\right| + c \quad = -\frac{2}{3}\log\left(\sqrt{x^3+1} - x\sqrt{x}\right) + c \quad \cdots\cdots$ (答)

$= -\frac{2}{3}\log\frac{\left(\sqrt{x^3+1}-x\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^3+1}+x\sqrt{x}} + c = -\frac{2}{3}\log\frac{1}{\sqrt{x^3+1}+x\sqrt{x}} + c = \frac{2}{3}\log\left(\sqrt{x^3+1}+x\sqrt{x}\right) + c$

[別解法 2]

$t = \tan\theta\ (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおいた場合は、

$dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \quad \sqrt{t^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta+1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{|\cos\theta|} = \frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore I = \frac{2}{3}\int \cos\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{3}\int\frac{(\sin\theta)'d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{3}\int\frac{d(\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$s = \sin\theta$ とおくと

$I = \frac{2}{3}\int\frac{ds}{1-s^2} = \frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}\right)ds = \frac{1}{3}\log|s+1| - \frac{1}{3}\log|s-1| + c = \frac{1}{3}\log\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + c$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で成立する恒等式 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$ の両辺に $\tan\theta$ を乗じて得られる $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$ より $s = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

$\therefore I = \frac{1}{3}\log\left|\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+1}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-1}\right| + c = \frac{1}{3}\log\left|\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{t-\sqrt{t^2+1}}\right| + c = \frac{1}{3}\log\left|\frac{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2}{\left((t-\sqrt{t^2+1}\right)\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}\right| + c = \frac{2}{3}\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + c$

$= \frac{2}{3}\log\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}\right)$+c $\quad\cdots\cdots$ (答)