微分積分II(b)　中間試験　問題・答案用紙　（全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部 物質・生命化学科 1年生対象, 担当教員 田嶋,　2017年12月8日1限実施

[配布・提出物] 配布物はこの問題・答案用紙とマークシートである。問題・答案用紙のホッチキスは外さず綴じたまま, 全ての配布物を提出せよ。問題・答案用紙の各用紙とマークシートの所定欄に学科・学籍番号・氏名を記入・マークせよ。
[答え方] 大問【1】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【2】,【3】,【4】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。（マークシートには対応する記入欄を設けていない。）
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には0を記入せよ。負符号 $(-)$ が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0を答えとするときの分母は1とせよ。

記入例： $2 = \boxed{2} = \boxed{0}\boxed{2} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{2} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$, $\quad -3 = \boxed{-}\boxed{3} = \boxed{-}\boxed{0}\boxed{3} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$0 = \boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{1}} = \dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}{\boxed{0}\boxed{1}}$　　$+\boxed{}\boxed{}$ に -3 を解答するには $+\boxed{-}\boxed{3}$

[注意] $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を $\arcsin x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ を $\arccos x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ を $\arctan x$ と表記してもよい。
積分定数は断りなく c, c', c'', c_1, c_2, c_3, $\cdots$ 等と書き表すものとする。

【1】 小問 i)〜xiv) の等式または文章に入る適切な数値を答えよ。(5点× 4問=20点。第2〜4頁に続く。)

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} = \frac{\boxed{1:\ -}\boxed{2:\ 1}}{\boxed{3:\ 2}\,x^{\boxed{4:\ 2}}} + \mathrm{c}$

解答の求め方

$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = -\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{-1}{2x^2}$ ……(答)

ii) $\displaystyle\int \cos(4x)\,dx = \frac{\boxed{5:\ 1}\sin(4x) + \boxed{6:\ 0}\cos(4x)}{\boxed{7:\ 4}} + c$

解答の求め方

$\int \cos(4x)\,dx = \int \cos(4x)\frac{1}{4}d(4x) = \frac{1}{4}\int \cos(4x)\,d(4x) = \frac{1}{4}\sin(4x) + c = \frac{1\cdot\sin(4x)+0\cdot\cos(4x)}{4} + c'$ ……(答)

iii) $\displaystyle\int 5^x\,dx = \left(\frac{\boxed{8:\ 0}}{x+1} + \boxed{9:\ 0}\log 5 + \frac{\boxed{10:\ 1}}{\log 5}\right)5^x + c$

解答の求め方

$\int 5^x\,dx = \int \left(e^{\log 5}\right)^x dx = \int e^{(x\log 5)}\,dx = \frac{1}{\log 5}\int e^{(x\log 5)}\,d(x\log 5) = \frac{1}{\log 5}e^{(x\log 5)} + c = \frac{1}{\log 5}\left(e^{\log 5}\right)^x + c = \frac{1}{\log 5}5^x + c =$
$\left(\frac{0}{x+1} + 0\cdot\log 5 + \frac{1}{\log 5}\right)5^x + c$ ……(答)

iv) $\displaystyle\int \frac{2+2x^2+3\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \boxed{11:\ 2}\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \boxed{12:\ 3}\,\mathrm{Tan}^{-1}x + c$

解答の求め方

$\int \frac{2+2x^2+3\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2+2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{3\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 2\,\mathrm{Sin}^{-1}x + 3\,\mathrm{Tan}^{-1}x + c$ ……(答)

【1】（第 1 頁からのつづき。5 点× 4 問=20 点）

v) $\displaystyle\int_2^4 \log x\,dx = \boxed{13:\ 6}\log 2 - \boxed{14:\ 2}$

解答の求め方

$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = \int (x)'\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$

$\int_2^4 \log x\,dx = [x\log x - x]_2^4 = 4\log 4 - 4 - 2\log 2 + 2 = 4\log 2^2 - 2\log 2 - 2 = 4\cdot 2\log 2 - 2\log 2 - 2 = 6\log 2 - 2$ ……(答)

vi) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\boxed{15:\ 3}}}{\boxed{16:\ 2}}$

解答の求め方

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,(1-x^2)'\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{1/2} = -\sqrt{1-x^2}+c$

$\int_{1/2}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{1/2}^1 = 0 + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ……(答)

vii) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \frac{\boxed{17:\ 1}}{\boxed{18:\ 4}}\pi - \frac{\boxed{19:\ 1}}{\boxed{20:\ 2}}\log 2$

解答の求め方

$\int \mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \int 1\cdot\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \int (x)'\cdot\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = x\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \int x\left(\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)'\,dx = x\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \int x\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= x\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = x\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'dx}{x^2+1} = x\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$

$\int_0^1 \mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \left[x\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 = 1\cdot\mathrm{Tan}^{-1}1 - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\log 2$ ……(答)

viii) $\displaystyle\int_0^1 xe^{3x}\,dx = \frac{\boxed{21:\ 2}e^3 + \boxed{22:\ 1}}{\boxed{23:\ 9}}$

解答の求め方

$\int xe^{3x}\,dx = \int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx = x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int (x)'\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c = \frac{3x-1}{9}e^{3x} + c$

$\int_0^1 xe^{3x}\,dx = \left[\frac{3x-1}{9}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$ ……(答)

【1】（第 2 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点）

ix) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx = \frac{\boxed{24:\ 5}\,\pi}{\boxed{25:\ 3}\,\boxed{26:\ 2}}$

[参考] n が偶数のとき $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$ が成り立つ。

解答の求め方

$\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx = \frac{(6-1)!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5!!}{6!!\cdot 2}\pi = \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2\cdot2}\pi = \frac{5}{2\cdot4\cdot2\cdot2}\pi = \frac{5}{32}\pi$ ……(答)

x) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = \boxed{27:\ 2}\sqrt{x} - \boxed{28:\ 6}\log\left(\boxed{29:\ 3} + \sqrt{x}\right) + c$

解答の求め方

$t = \sqrt{x}$ とおくと $x = t^2$, $dx = 2tdt$ なので,

$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{3+t} = \int \frac{2(3+t)-6}{3+t}\,dt = \int 2\,dt - 6\int \frac{dt}{3+t} = 2t - 6\log|3+t| + c = 2\sqrt{x} - 6\log\left(3+\sqrt{x}\right) + c$ ……(答)

xi) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos(2x)} = \frac{\boxed{30:\ 0}\sin x + \boxed{31:\ 0}\cos x + \boxed{32:\ 1}\tan x}{\boxed{33:\ 2}} + c$

解答の求め方

余弦関数の加法定理により $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$\therefore\ 1+\cos 2x = 1+\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$

従って $\int \frac{dx}{1+\cos(2x)} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x}$

ここで、$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ を利用すると、

(与式) $= \frac{1}{2}\tan x + c = \frac{0\cdot\sin x + 0\cdot\cos x + 1\cdot\tan x}{2} + c$ ……(答)

【1】(第 3 頁からのつづき。5 点× 3 問=15 点)

xii) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx = \frac{\boxed{34:\ 1}}{\boxed{35:\ 3}}$

解答の求め方

$t = x^3$ とおくと $dt = 3x^2dx$ なので $x^2dx = \frac{1}{3}dt$ が成り立つ。また、 $x = 0 \to \infty$ は $t = 0 \to \infty$ に対応する。

$\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^3}\,x^2dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{3}\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{3}\{0-(-1)\} = \frac{1}{3}$ ······(答)

xiii) 6 個の広義積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_0^3 \frac{dx}{x}, \int_0^2 \frac{dx}{x^2}, \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_3^\infty \frac{dx}{x}, \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ のうち、収束するものは $\boxed{36:\ 2}$ 個である。また。収束するものの積分値の和は $\dfrac{\boxed{37:\ 9}}{\boxed{38:\ 2}}$ である。

解答の求め方

広義積分の値を計算すると、$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^4 = 2\sqrt{4} = 4$, $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^\infty = \frac{1}{2}$ の 2 個の広義積分は有限の値を持ち、他の 4 個の広義積分は無限大に発散することがわかる。

値の和は $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ である。

xiv) 曲線 C : $y = x^3 \quad (a \le x \le b)$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\boxed{39:\ 0}x^6 + \boxed{40:\ 0}x^5 + \boxed{41:\ 9}x^4 + \boxed{42:\ 0}x^3 + \boxed{43:\ 0}x^2 + \boxed{44:\ 0}x + \boxed{45:\ 1}}\,dx$ である。

解答の求め方

曲線 $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ の長さ L は、$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\,dx$ で与えられる。 $f(x) = x^3$ を代入すると、

$L = \int_a^b \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + 9x^4}\,dx = \int_a^b \sqrt{0x^6 + 0x^5 + 9x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1}\,dx$ ······(答) を得る。

【2】 $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$ を求めよ (10 点)

解答例

$F(t) = \int f(t)dt$ とすると、$F'(t) = f(t)$ なので、

$g(x) = \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_{t=2x}^{t=x^2} = \frac{dF(x^2)}{dx} - \frac{dF(2x)}{dx} = \frac{dF(x^2)}{d(x^2)} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{dF(2x)}{dx} \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \frac{dF(x^2)}{d(x^2)} \cdot 2x - \frac{dF(2x)}{dx} \cdot 2$

$= F'(x^2) \cdot 2x - F'(2x) \cdot 2 = 2xf(x^2) - 2f(2x)$ $\cdots\cdots$ (答)

【3】 極座標で $r = 1 + \cos\theta$,　$0 \le \theta \le 2\pi$ と表される x-y 平面上の曲線 C について下記の小問 i), ii) に答えよ。(合計 10 点)

i) 曲線 C の概形を描け。　　ii) 曲線 C の長さ L を求めよ。

解答例

i) 下記の表の 8 点を正確に通過するように描くこと。 $\cdots$ 5 点

θ	0	$\frac{\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$	π
r	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

ii) (弧長) $= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\,d\theta$

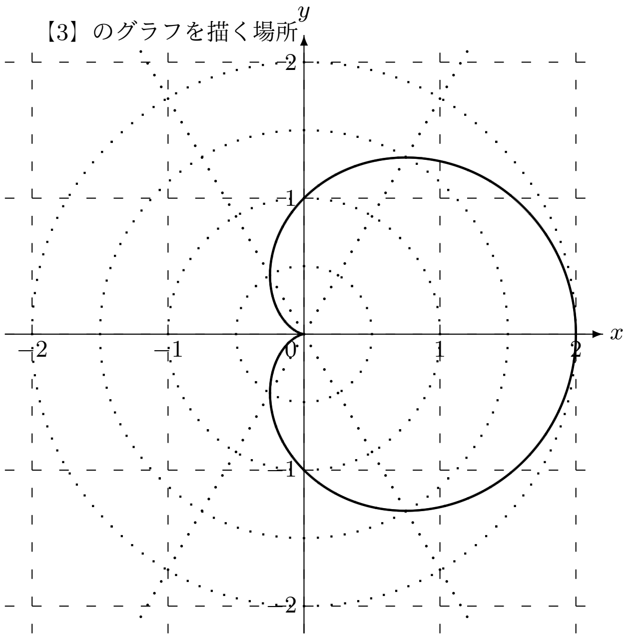
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$

$= 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta$

$= 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$= 4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$

$= 8$ $\cdots\cdots$ (答)$\cdots$ 5 点



【4】 $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)}$ を求めよ。(10 点)

解答例

$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$ とおいて A,B,C を定めると、

$1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$

$1=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$

上式が任意の x に対して恒等的に成立するための必要十分条件は $A+B+C=0,\ A+2B-C=0,\ -2A=1$ である。

この条件の連立方程式を解いて A,B,C の値を求めると、

$A=-\frac{1}{2},\ B+C=\frac{1}{2},\ 2B-C=\frac{1}{2},$

$3B=1,\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{2}-B=\frac{1}{6}$

従って解は、 $A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{6}$ である。

与式は被積分関数を部分分数分解した形に書き直すと、不定積分が容易に求まる。

$I=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$

$I=-\frac{1}{2}\log|x|+\frac{1}{3}\log|x-1|+\frac{1}{6}\log|x+2|+c\quad\cdots\cdots$ (答)

$\quad=\frac{1}{6}\log\left|\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}\right|+c\quad\cdots\cdots$ (答)