微分積分II(a)　中間試験　問題・答案用紙　（全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部 物質生命工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋,　 2016 年 12 月 2 日 2 限実施

[答え方] 大問【1】と【4】は最終的な答をマークシートに記入するだけでよい。大問【2】と【3】は計算過程を答案用紙に記した上で最終的な答をマークシートに記入せよ。大問【5】〜【8】は計算過程と最終的な答を答案用紙にのみ記せ。(マークシートには対応する記入欄を設けていない。)
[数値のマークの仕方] 分数は約分可能なら必ず約分せよ。余分な桁には 0 を記入せよ。負符号 (−) が必要なら, 分子の左端の枠に入れよ。0 を答えとするときの分母は 1 とし, 分子の 0 に負符号を付けてはならない。

記入例： $2=\boxed{2}=\boxed{0}\boxed{2}=\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}=\dfrac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{1}}$, $\quad -3=\boxed{-}\boxed{3}=\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}=\dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{-}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}=\dfrac{\boxed{-}\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

[注意] $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記してもよい。

【1】 小問 i)〜v) の左辺に等しい数式を選択肢から選び, その番号で答えよ。ただし, a は正の定数とする。また, 積分定数は省略してある。(3 点× 5 問=15 点)

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$ (選択肢の $\boxed{{}^{1:}\ 2}$ 番)　　選択肢： 1: $\arcsin ax$　 2: $\arcsin \frac{x}{a}$　 3: $a\arcsin x$　 4: $\frac{1}{a}\arcsin x$　 5: $a\arcsin ax$　 6: $\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}$

解答の求め方

出題の意図は、教科書 p.79 の「基本的な不定積分」を公式として暗記してもらうことではありません。$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$ を記憶していることは出題の前提ですが、置換積分で与式をそれに帰着させて欲しいのです。あるいは、次善の解答方法として、選択肢の夫々を微分して正解を探すのでも結構です。

ii) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=$ (選択肢の $\boxed{{}^{2:}\ 6}$ 番)　　選択肢： 1: $\arctan ax$　 2: $\arctan\frac{x}{a}$　 3: $a\arctan x$　 4: $\frac{1}{a}\arctan x$　 5: $a\arctan ax$　 6: $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$

解答の求め方

$\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x$ は記憶した上で、置換積分で与式をそれに帰着させるか、選択肢の夫々を微分して正解を探すかして下さい。

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=$ (選択肢の $\boxed{{}^{3:}\ 1}$ 番)　　選択肢: 1: $\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$　 2: $-\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$　 3: $\log\left|x-\sqrt{x^2+a}\right|$　 4: $\log\left|\sqrt{x}+\sqrt{x^2+a}\right|$　 5: $\log\left|\sqrt{x}-\sqrt{x^2+a}\right|$　 6: $\log\left|\sqrt{a}+\sqrt{x^2+a}\right|$

解答の求め方

見たことのあるはずの問題なので、受験者が、記憶を頼りに正解だと思える選択肢から順番に微分して確かめていくだろうと想定して作問しました。

iv) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=$ (選択肢の $\boxed{{}^{4:}\ 4}$ 番)　　選択肢：1: $\tan x$　 2: $-\tan x$　 3: $\frac{1}{\tan x}$　 4: $-\frac{1}{\tan x}$　 5: $\tan^2 x$　 6: $\frac{1}{\tan^2 x}$

解答の求め方

$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x$ を記憶しているならば、置換 $x=\frac{\pi}{2}-t$ により $dx=-dt, \sin x=\cos t, \tan x=1/\tan t$ となることを利用して、与式をそれに帰着させて求めるのが望ましい。しかし、それに気がつかなくても、選択肢を微分して順次確かめて行けば答は分かります。

v) $\Bigl($ 曲線 $y=x^n\ \ (0\le x\le 1)$ の長さ $\Bigr)=$ (選択肢の $\boxed{{}^{5:}\ 3}$ 番)　　選択肢：1: $\int_0^1\sqrt{x^n+nx^{n-1}}dx$　 2: $\int_0^1\sqrt{1+nx^{n-1}}dx$　 3: $\int_0^1\sqrt{1+n^2x^{2n-2}}dx$　 4: $\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^{n+1}}{n+1}}dx$　 5: $\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^{2n+2}}{(n+1)^2}}dx$　 6: $\int_0^1\sqrt{x^{2n}+n^2x^{2n-2}}dx$

解答の求め方

$f(x)=x^n$ と書けば、求める曲線の長さは $\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ です。

科目名: 微分積分 II (中間試験)	試験日: 平成 28 年 12 月 2 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	(第 1 頁目) 得点 /15

【2】 下記の小問 i) ∼ v) の値を求めよ。(3 点× 5 問=15 点)

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{\boxed{6:\ 4}}{\boxed{7:\ 3}}$

解答の求め方

置換 $t = x^3$ によって求めればよい。

ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^4\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{\boxed{8:\ 1}}{\boxed{9:\ 8}\boxed{10:\ 0}}$

解答の求め方

置換 $t = \sin\frac{x}{2}$ によって求めればよい。

iii) $\displaystyle\int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{\sqrt{\boxed{11:\ 6}}}{\boxed{12:\ 1}\boxed{13:\ 8}}\pi$

解答の求め方

$\frac{1}{2x^2+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2+1}$ なので、置換 $t = \sqrt{\frac{2}{3}}x$ によって求めればよい。

iv) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx = \frac{\pi}{\boxed{14:\ 4}} - \frac{\log 2}{\boxed{15:\ 2}}$

解答の求め方

部分積分法により $\int 1\cdot\arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$ が成り立つことを使って求めればよい。

v) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\sin^4 x\,dx = \frac{\boxed{16:\ 3}}{\boxed{17:\ 2}\boxed{18:\ 5}\boxed{19:\ 6}}\pi$　　[ヒント] n が偶数のとき $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$

解答の求め方

$\sin\,x\,\cos\,x = \frac{1}{2}\sin\,2x$ を使って

(与式)$=\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\sin^4 2x\,dx = \frac{1}{32}\int_0^{\pi}\sin^4(2x)\,d(2x) = \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\sin^4(2x)\,d(2x) = \frac{1}{16}\cdot\frac{3!!\pi}{4!!\cdot 2} = \frac{3\pi}{256}$ として求めるのがよい。

あるいは、$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ を使って、(与式)$=\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\left(1-\cos^2 x\right)^2\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,dx - 2\int_0^{\pi/2}\cos^6 x\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx$

$= \left(\frac{3!!}{4!!} - 2\frac{5!!}{6!!} + \frac{7!!}{8!!}\right)\frac{\pi}{2} = \left(\frac{3}{8} - 2\frac{5}{16} + \frac{35}{128}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{256}$ として求めるのでもよい。

【3】 下記の小問 i), ii) の定積分の値を求めよ。(7 点+8 点=15 点)

i) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \frac{\boxed{20:\ 0}\ \boxed{21:\ 2}}{\boxed{22:\ 1}} + \frac{\boxed{23:\ -}\ \boxed{24:\ 1}}{\boxed{25:\ 2}}\pi$

解答例

$t = \sqrt{x}$ とおくと $x = t^2$ なので $dx = 2tdt$. また $x = 0 \to 1$ は $t = 0 \to 1$ に対応する.

$I = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} 2tdt = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = \Big[2t - 2\arctan t\Big]_0^1 = 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$ (答)

ii) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\,x}{1+\sin\,x}\,dx = \frac{\boxed{26:\ -}\ \boxed{27:\ 1}}{\boxed{28:\ 1}} + \frac{\boxed{29:\ 0}\ \boxed{30:\ 1}}{\boxed{31:\ 2}}\pi$

解答例

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと $dx = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}$. また, $x = 0 \to \frac{\pi}{2}$ は $t = 0 \to 1$ に対応する.

$I = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2+2t)(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)} dt = \int_0^1 \left\{\frac{-2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t^2}\right\} dt$

$= \left[\frac{2}{1+t} + 2\arctan t\right]_0^1 = 1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2 - 0 = -1 + \frac{\pi}{2}$ (答)

科目名: 微分積分 II (中間試験)	試験日: 平成 28 年 12 月 2 日	出題者: 田嶋	学科	学籍番号	氏名	得点 /15

【4】 下記の各小問 i)〜xv) のそれぞれについて, (狭義ないし広義の）定積分 I_1, I_2, I_4 のうちで, 有限の値に収束するものを選び, その添字の和を答えよ。例えば, 「I_1 が発散, I_2 が収束, I_4 が発散」の場合の答は 2 となり, 「I_1 が収束, I_2 が発散, I_4 が収束」の場合の答は 5 となる (I_1 の添字の 1 と I_4 の添字の 4 を足して 5 を得る)。3 つとも発散する場合の答は 0, 3 つとも収束する場合の答は 7 となる。(1 点× 15 問=15 点) $\cdots$ **答の求め方を第 7〜8 頁に解説してあります。**

i) $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/5}}$　$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}}$　$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$　(答)= 32: 7

ii) $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$　$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$　$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x}$　(答)= 33: 3

iii) $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$　$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$　$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/2}}$　(答)= 34: 0

iv) $I_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/5}}$　$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/4}}$　$I_4 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/3}}$　(答)= 35: 0

v) $I_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}$　$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2/3}}$　$I_4 = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$　(答)= 36: 0

vi) $I_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$　$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$　$I_4 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/2}}$　(答)= 37: 7

vii) $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$　$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x+x^2}$　$I_4 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$　(答)= 38: 4

viii) $I_1 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$　$I_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x|^3+1}}$　$I_4 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$　(答)= 39: 6

ix) $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$　$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$　$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}$　(答)= 40: 7

x) $I_1 = \int_0^2 \sqrt{|\log x|}dx$　$I_2 = \int_0^2 \log x\,dx$　$I_4 = \int_0^2 (\log x)^2 dx$　(答)= 41: 7

xi) $I_1 = \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{\log x}}$　$I_2 = \int_2^\infty \frac{dx}{\log x}$　$I_4 = \int_2^\infty \frac{dx}{(\log x)^2}$　(答)= 42: 0

xii) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$　$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$　$I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x}$　(答)= 43: 0

xiii) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$　$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\tan x}$　$I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\tan x)^2}$　(答)= 44: 1

xiv) $I_1 = \int_0^\infty e^{-x}dx$　$I_2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$　$I_4 = \int_0^\infty e^{-x^3}dx$　(答)= 45: 7

xv) $I_1 = \int_0^\infty xe^{-x}dx$　$I_2 = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx$　$I_4 = \int_0^\infty x^3e^{-x}dx$　(答)= 46: 7

科目名: 微分積分 II (中間試験)	試験日: 平成 28 年 12 月 2 日	出題者: 田嶋	学 科	学籍番号	氏 名	(第 4 頁目) 得 点　/15

【5】 下記の小問 i), ii) に答えよ。(5 点× 2 問=10 点)

i) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x}^{x^2} f(t)dt$ を求めよ。　　ii) $h(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x}^{x^2} (t^4+1)^t dt$ を求めよ。

解答例

i) $F(t) = \int f(t)dt$ とおくと,

$g(x) = \frac{d}{dx}\left\{F(x^2) - F(-x)\right\} = \frac{dF(x^2)}{d(x^2)} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{dF(-x)}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} = f(x^2)\cdot 2x - f(-x)\cdot(-1)$

$\therefore\ g(x) = 2xf(x^2) + f(-x)$ (答)

ii)

前小問の結果で $f(t) = (t^4+1)^t$ とすればよい。

即ち、$f(x^2) = \left((x^2)^4+1\right)^{x^2} = (x^8+1)^{x^2}$, $f(-x) = \left((-x)^4+1\right)^{-x} = (x^4+1)^{-x}$ を代入すればよい。

$\therefore\ h(x) = 2xf(x^2) + f(-x) = 2x(x^8+1)^{x^2} + (x^4+1)^{-x}$ (答)

【6】 極座標で $r = \left|\cos\theta + \dfrac{1}{2}\right|$,　$0 \le \theta \le 2\pi$ と表される x-y 平面上の曲線 C について下記の小問 i), ii) に答えよ。(合計 10 点)

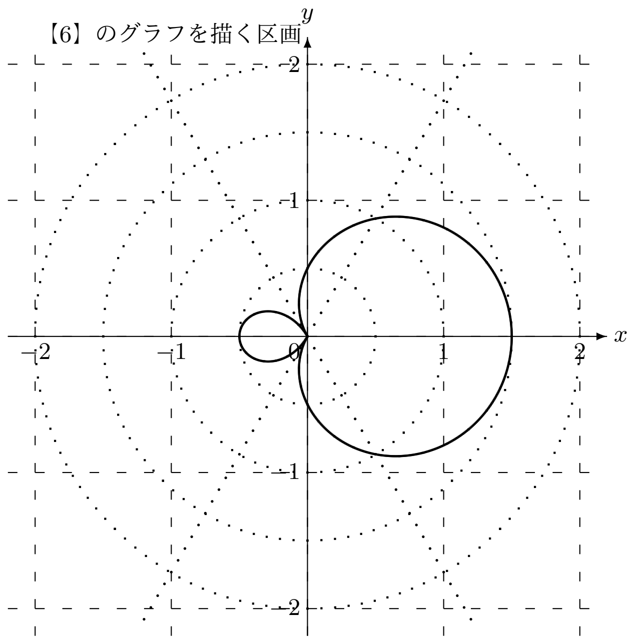
i) 曲線 C の概形を描け。

ii) 曲線 C の弧長の計算式は $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{R+\cos\theta}\,d\theta$ という形に表すことができる。この式中の R に当てはまる有理数を求めよ。

解答例

i) 下記の表の 8 点を正確に通過するように描くこと。 $\cdots$ 7 点

θ	0	$\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$	π
r	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



ii) (弧長) $= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\theta + \cos\theta + \frac{1}{4} + \sin^2\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\theta}\,d\theta$

$R = \frac{5}{4}$ (答) $\cdots$ 3 点

【7】 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{4e^x}{e^{3x}+e^{2x}+e^x+1}dx$ を求めよ。(10点)

解答例

$t = e^x$ とおくと, $e^x dx = dt$ なので,

$I = \int \frac{4}{t^3+t^2+t+1}\,dt$

$= \int \frac{4}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$

$= \int \left(\frac{2}{t+1} + \frac{-2t+2}{t^2+1}\right)\,dt$

$= 2\log|t+1| - \log(t^2+1) + 2\arctan t + c$

$\therefore\ I = 2\log(e^x+1) - \log(e^{2x}+1) + 2\arctan e^x + c$ (答)

【8】 $I_n = \displaystyle\int x^n e^x\,dx$ について, 以下の小問 i), ii) に答えよ。(10点)

i) 任意の正の整数 n に対して, I_n を I_{n-1} を使って表す漸化式を作れ。

ii) 前小問で作った漸化式を利用して I_3 を求めよ。

解答例

i)

$I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n (e^x)' dx = x^n e^x - \int (x^n)' e^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$

$\therefore\ I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$ (答) $\cdots$ 7点

ii)

$I_0 = e^x + c_0$

$I_1 = xe^x - I_0 = (x-1)e^x + c_1,$

$I_2 = x^2e^x - 2I_1 = (x^2-2x+2)e^x + c_2,$

$I_3 = x^3e^x - 3I_2 = (x^3-3x^2+6x-6)e^x + c_3$ (答) $\cdots$ 3点

【4】の解き方

i),ii),iii)

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ は $-\infty < \alpha < 1$ で有限値 $\frac{1}{1-\alpha}$ に収束し、$1 \leq \alpha < \infty$ で無限大に発散することを使う

iv),v),vi)

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ は $-\infty < \alpha \leq 1$ で無限大に発散し、$1 < \alpha < \infty$ で有限値 $\frac{1}{\alpha-1}$ に収束することを使う。

vii)

$I_1 = I_{1\mathrm{A}} + I_{1\mathrm{B}},\ I_{1\mathrm{A}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x},\ I_{1\mathrm{B}} = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ とおくと、

$1 < x < \infty$ で $0 < \sqrt{x} < x$ なので $0 < \sqrt{x} + x < 2x$ であり、従って $\frac{1}{\sqrt{x}+x} > \frac{1}{2x}$ が成り立つ。

$\therefore\ I_{1\mathrm{B}} > \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ なので $I_{1\mathrm{B}} = \infty$。$I_{1\mathrm{A}} > 0$ なので、$I_1 = \infty$ である。

$I_2 = I_{2\mathrm{A}} + I_{2\mathrm{B}},\ I_{2\mathrm{A}} = \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2},\ I_{2\mathrm{B}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$ とおくと、

$0 < x < 1$ で $0 < x^2 < x$ なので $0 < x + x^2 < 2x$ であり、従って $\frac{1}{x+x^2} > \frac{1}{2x}$ が成り立つ。

$\therefore\ I_{2\mathrm{A}} > \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$ なので $I_{2\mathrm{A}} = \infty$。$I_{2\mathrm{B}} > 0$ なので、$I_2 = \infty$ である。

$I_4 = I_{4\mathrm{A}} + I_{4\mathrm{B}},\ I_{4\mathrm{A}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}},\ I_{4\mathrm{B}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ とおくと、

$x^2 + \sqrt{x} > \sqrt{x} > 0$ であるから、$0 < \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ。

$\therefore\ 0 < I_{4\mathrm{A}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = (\text{有限値})$ なので $I_{4\mathrm{A}}$ は有限値を持つ。

また、$x^2 + \sqrt{x} > x^2 > 0$ であるから、$0 < \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$ が成り立つ。

$\therefore\ 0 < I_{4\mathrm{B}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = (\text{有限値})$ なので $I_{4\mathrm{B}}$ は有限値を持つ。従って、I_4 は有限値を持つ。

ただし、出題の意図は、上記のような厳密な証明でなく、下記のような略式の推論で迅速に判定してもらうことである。

$0 < a \ll 1 \ll b < \infty$ とする。

I_1 は $\int_b^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x} \approx \int_b^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ なので、発散する。

I_2 は $\int_0^a \frac{dx}{x+x^2} \approx \int_0^a \frac{dx}{x} = \infty$ なので、発散する。

I_4 は $\int_0^a \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \approx \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = (\text{有限値}),\quad \int_a^b \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} = (\text{有限値}),\quad \int_b^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \approx \int_b^\infty \frac{dx}{x^2} = (\text{有限値})$ なので有限値に収束する。

viii)

$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x|^a+1}} = 2I_\mathrm{A} + 2I_\mathrm{B},\ I_\mathrm{A} = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{|x|^a+1}},\ I_\mathrm{B} = \int_b^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x|^a+1}}\ (b \gg 1)$ とおくと、I_A は有限値を持ち、

$|x| \gg 1$ で $\sqrt{|x|^a+1} \approx |x|^{a/2}$ なので、$I_\mathrm{B} \approx \int_b^\infty \frac{dx}{x^{a/2}}$ は $a > 2$ で有限値に収束し、$a \leq 2$ で無限大に発散する。

$\therefore\ I_1$ は発散、I_2 と I_4 は収束する。

ix)

$0 < a < b < 1,\ a \ll 1,\ 1 - b \ll 1$ として、

$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \approx \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = (\text{有限値})$、$\int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \approx \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = (\text{有限値})$ である。

また、$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ は被積分関数値が有限で積分区間の長さが有限なので有限値をもつ。従って I_1 は有限値を持つ。

$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}} \approx \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = (\text{有限値})$、

$\int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}} \approx \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1-x)}} = (\text{有限値})$ である。従って I_2 は有限値を持つ。

$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1+x+x^2)(1-x)}} \approx \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = (\text{有限値})$、

$\int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x+x^2)(1-x)}} \approx \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{3(1-x)}} = (\text{有限値})$ である。従って I_4 は有限値を持つ。

x)

微分積分 I の「不定形の極限」の項目で学習したとおり任意の正の実定数 a について $\lim_{x \to +0} x^a \log x = 0$ が成り立つことより、

$0 < b \ll 1$ として $0 < x < b$ で $1 < |\log x| < \frac{1}{x^a}$ が成り立ち、従って、

$1 < \sqrt{|\log x|} < |\log x| < |\log x|^2 < \frac{1}{x^{2a}}$ が成り立つので、

$0 < \int_0^b \sqrt{|\log x|}\, dx < \int_0^b |\log x|\, dx < \int_0^b |\log x|^2\, dx < \int_0^b \frac{dx}{x^{2a}} =$ ($0 < a < \frac{1}{2}$ にとることで有限値になる)

が成立する。当然、$\int_0^b \log x\, dx = -\int_0^b |\log x|\, dx$ も有限である。従って I_1, I_2, I_4 は全て有限値を持つ。

xi)

微分積分 I の「不定形の極限」の項目で学習したとおり任意の正の実定数 a について $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$ が成り立つことより、

$b \gg 1$ として $x > b$ で $1 < \log x < x^a$ が成り立ち、従って、$\frac{1}{\sqrt{\log x}} > \frac{1}{\log x} > \frac{1}{(\log x)^2} > \frac{1}{x^{2a}}$ が成り立つので、

$\int_b^\infty \frac{dx}{\sqrt{\log x}} > \int_b^\infty \frac{dx}{\log x} > \int_b^\infty \frac{dx}{(\log x)^2} > \int_b^\infty \frac{dx}{x^{2a}} =$ ($a \leq \frac{1}{2}$ にとることで ∞ になる)

従って I_1, I_2, I_4 は全て無限大に発散する。

xii)

$x \approx 0$ で $\sin x \approx x, \cos x \approx 1, \quad x \approx \frac{\pi}{2}$ で $\sin x \approx 1, \cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$

であることより明らかに I_1, I_2, I_4 は全て無限大に発散する。

xiii)

$x \approx 0$ で $\tan x \approx x$ である。

$0 < b \ll 1$ として $\int_0^b \frac{dx}{(\tan x)^a} \approx \int_0^b \frac{dx}{x^a} =$ ($a < 1$ で収束, $a \geq 1$ で発散) であるから

I_1 は有限値に収束し、I_2 と I_4 は無限大に発散する。

xiv)

I_1 は積分値が計算でき、有限値になることは容易にわかる。

$b \gg 1$ として $\infty > x > b$ で

$\infty > x^3 > x^2 > x$ が成り立つ。$f(t) = e^{-t}$ とすると、f は単調減少関数なので、

$f(\infty) < f(x^3) < f(x^2) < f(x)$ 　即ち、$0 < e^{-x^3} < e^{-x^2} < e^{-x}$ 　が成り立つ。従って、

$0 < \int_b^\infty e^{-x^3}\, dx < \int_b^\infty e^{-x^2}\, dx < \int_b^\infty e^{-x}\, dx =$ (有限値)

が成立し、I_1, I_2, I_4 は全て有限値を持つ。

xv)

これらは部分積分法により計算でき、その答が有限値であることを知っていれば、それが答である。知らなければ、

微分積分 I で学習したとおり、任意の実定数 a について $\lim_{x \to \infty} x^a e^{-x} = 0$ が成り立つので、

十分に大きな b に対し、$b < x < \infty$ で $e^{-x} < x^{-a}$ を成り立たせることができる。

従って、$n \geq 1$ に対し、$a = -n - 2$ ととれば、$b < x < \infty$ で $0 < x^n e^{-x} < x^{-2}$ が成り立つので、

$0 < \int_b^\infty x^n e^{-x}\, dx < \int_b^\infty x^{-2}\, dx =$ (有限値)

が成り立つ。従って、$n = 1, 2, 3$ の場合に相当する I_1, I_2, I_4 は全て有限値を持つ。