不定積分を求める基本的手法の練習

【 基本的な関数の不定積分 】(微分公式を積分公式として見る．c は積分定数である.)

1. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c \qquad (a \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$
4. $\displaystyle\int \sin\,x\,dx = -\cos\,x + c$
5. $\displaystyle\int \cos\,x\,dx = \sin\,x + c$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

【 積分公式として覚えておくと役に立つ式 】

8. $\displaystyle\int \log\,x\,dx = x\log\,x - x + c$ 　(部分積分法で容易に求まる.)
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$ 　(tan の微分公式を積分公式として使う．積分を自分で求めたいなら, 定石は置換 $t = \tan\,x$.)

【 置換積分法 】 integration by substitution

$$\boxed{x = x(t)\ \text{として}\ \int f(x)dx = \int f\left(x\left(t\right)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (※)}$$

★ 不定積分計算の心構え：結果が得られたら、それを微分して被積分関数に一致することを確かめるのが望ましい。

下記の問題 (1)〜(4) は置換方法が自明な場合である.
即ち、上記の公式 (※) の右辺の形をした積分が与えられたとき, それを左辺の形に直して答を求める問題である.

(1) $\displaystyle F(x) = \int xe^{x^2}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(x^2)' = \frac{1}{2}x$ に着目する.

(2) $\displaystyle F(x) = \int \sin^3 x\cos x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(\sin\,x)' = \cos\,x$ に着目する.

(3) $\displaystyle F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(1+x^2)' = 2x$ に着目する.

(4) $\displaystyle F(x) = \int \frac{(\log\,x)^2}{x}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$ に着目する.

下記の問題 (5)〜(8) は一次変換で既知の積分に帰着できる場合である.

(5) $\displaystyle F(x) = \int \sin 2x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $\displaystyle\int \sin t\,dt = -\cos t + c$ に帰着させよ.

(6) $F(x) = \displaystyle\int \frac{2}{3x^2+4}\,dx$　　$\cdots\cdots$ $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c$ に帰着させよ.

(7) $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx \ \ (a>0)$　　$\cdots$ 積分公式 $\displaystyle\int \sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+1} + \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right\} + c$ に帰着させよ.

(8) $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$　　$\cdots\cdots$ 積分公式 $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + c$ に帰着させよ.

下記の問題 (9)〜(12) は指示通りに置換積分を遂行する能力があるかどうかを見る問題である.

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ を積分変数の置換 $x = \sin t \ (-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$ により示せ.

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$ を積分変数の置換 $x = \cos t \ (0 \le t \le \pi)$ により示せ.

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ を積分変数の置換 $x = \tan t \ (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ により示せ.

(12) $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ を積分変数の置換 $t = \sqrt{x}$ により求めよ.

下記ではうまい置換方法を自分で見つけることが肝要である.

(13) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x}}dx$　　$\cdots\cdots$ (12) のように $t = \sqrt{3-2x}$ で求まるが $t = 3-2x$ でも求まる. 容易と思う方を選べ.

式変形により被積分関数が容易に積分できる形になる場合もある. 下記はその一例である.

(14) $F(x) = \displaystyle\int \tan^3 x\,dx$

【 部分積分法 】 integration by parts

積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$ より $f'g = (fg)' - fg'$. 両辺を x で積分すると

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

あるいは, $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx,\ G(x) = \int g(x)dx$ と書けば,

$$\boxed{\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx}$$

部分積分法を活用して下記の不定積分を求めよ.

(15) $F(x) = \displaystyle\int xe^{2x}dx$　　$\cdots\cdots$ x を微分して 1 に, e^{2x} を積分して $\frac{1}{2}e^{2x}$ にする.

(16) $F(x) = \displaystyle\int x^2\cos x\,dx$　　$\cdots\cdots$ x^2 は 2 回微分すると 1 になる. $\cos x$ は何回でも積分できる（簡単な数式として求まる）.

(17) $F(x) = \displaystyle\int x^3\log x\,dx$　　$\cdots\cdots$ x^3 は積分し, $\log x$ は微分する.

(18) $F(x) = \displaystyle\int \arcsin x\,dx$　　$\cdots\cdots$ $1\cdot\arcsin x$ と見て, 1 は積分し, 逆三角関数は微分する.

(19) $F(x) = \displaystyle\int \arctan x\,dx$　　$\cdots\cdots$ $1\cdot\arctan x$ と見て, 1 は積分し, 逆三角関数は微分する.

(20) $F(x) = \displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$　　$\cdots\cdots$ 部分積分を 2 回行うと右辺に $F(x)$ が現れ, 未知関数 $F(x)$ に関する一次方程式を得る.