三角関数の有理式の不定積分の計算例

【問題】不定積分 $F(x)=\displaystyle\int\frac{\sin\,x+\cos\,x}{(1+\sin\,x)\,(1+\cos\,x)}\,dx$ を求めよ.

【解答】

[1]： 積分変数を置き換えて有理式の積分に変換する

被積分関数が $\sin\,x$ および $\cos\,x$ の有理関数である場合の定石 (導出は後述の [4] で行う）

$$t=\tan\frac{x}{2}\quad \text{とおくと}\quad \cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\,x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2} \tag{1}$$

に従って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
F &= \int\frac{\sin\,x+\cos\,x}{(1+\sin\,x)\,(1+\cos\,x)}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt \qquad (\because\ dx=\tfrac{dx}{dt}\cdot dt) && (2)\\
&= \int\frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (\because\ \text{式 (1) を代入した}) && (3)\\
&= \int\frac{2t+1-t^2}{(1+t^2+2t)\,(1+t^2+1-t^2)}\cdot 2\,dt \qquad (\because\ \text{分母と分子に } (1+t^2) \text{ を乗じた}) && (4)\\
&= \int\frac{-t^2+2t+1}{t^2+2t+1}\,dt \qquad (\because\ 1+t^2+1-t^2=2) && (5)
\end{aligned}$$

という変数 t についての有理式の不定積分になる.

[2]： 置き換えた変数に関する有理式の不定積分を求める

式 (5) の被積分関数の分母を因数分解すると,

$$F = \int\frac{-t^2+2t+1}{(t+1)^2}\,dt \tag{6}$$

となる．この場合, 被積分関数を部分分数分解するには, 分子も $t+1$ の多項式として書き表せばよい．即ち,

$$\begin{aligned}
(\text{分子}) &= -t^2+2t+1 && (7)\\
&= -\{(t+1)-1\}^2+2\{(t+1)-1\}^2+1 \qquad (\because\ t=(t+1)-1) && (8)\\
&= -(t+1)^2+2(t+1)-1+2(t+1)-2+1 && (9)\\
&= -(t+1)^2+4(t+1)-2 && (10)
\end{aligned}$$

となる．これを式 (6) の分子に代入すると,

$$\begin{aligned}
F &= \int\frac{-(t+1)^2+4(t+1)-2}{(t+1)^2}dt && (11)\\
&= -\int dt+4\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+1)^2} && (12)\\
&= -t+4\log|t+1|+\frac{2}{t+1}+c \qquad (c\ \text{は積分定数}) && (13)
\end{aligned}$$

を得る.

[3] :　得られた表式を元の変数で表す

式 (1) より $t = \tan\frac{x}{2}$ であるから,

$$F = -\tan\frac{x}{2} + 4\log\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right| + \frac{2}{\tan\frac{x}{2} + 1} + c \qquad (c \text{ は積分定数}) \tag{14}$$

を得る．これが答である．

[4] :　式 (1) の導出方法

公式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割って得られる等式 $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入すると

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + t^2} \tag{15}$$

が得られる．余弦の倍角公式 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入したものと式 (15) とから,

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \tag{16}$$

が得られる．また, 正弦の倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入したものと式 (15) とから,

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\cdot t\cdot\frac{1}{1 + t^2} = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{17}$$

が得られる．最後に $t = \tan\frac{x}{2}$ の両辺を x で微分して得られる

$$\frac{dt}{dx} = \left\{\frac{d}{d\left(\frac{x}{2}\right)}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} \tag{18}$$

および式 (15) を使って,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1 + t^2} \tag{19}$$

が得られる．

[5] :　その他の有用な恒等式

三角関数で構成された数式は全く異なって見える別の形に表せることが多いので, 得られた積分結果がもっとシンプルな形に表せないか更に式変形を試みることが望ましい．また積分結果が問題の解答と一致しない場合に結果の一致を確かめることがしばしば必要となる．その際に役立ちそうな三角関数の恒等式を下記に掲げておく．

(sin と cos の半角公式より)

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \quad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2\frac{x}{2} \tag{20}$$

(sin の倍角公式より $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, また (20) 式より)

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \tag{21}$$

(tan の加法定理より)

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{22}$$