無理関数の不定積分の計算例 No.2

—「2 次の項の係数が負である 2 次式」の平方根が被積分関数に含まれる場合 —

【問題】　不定積分　$F(x)=\int\sqrt{a^2-x^2}\ dx$　を求めよ．ただし a は正の実数の定数とする $(0<a<\infty)$.

【解答】

この問題の被積分関数を有理化する（根号をなくす）置換方法は複数あるが, 置換の結果得られた有理関数の不定積分がなるべく容易に求まるような置換方法を選ぶのが賢明である．この問題の場合は,

$$x=a\ \sin\ t\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)\tag{1}$$

と置くのが最良の選択である．式 (1) の置換が可能である理由は, 被積分関数の根号の中身を負にしない範囲, 即ち,

$$a^2-x^2\geq 0\qquad\therefore\quad -a\leq x\leq a\tag{2}$$

に x の値が制限されることである．t の値を範囲 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ に制限したお陰で,

$$t=\arcsin\frac{x}{a}\qquad(-a\leq x\leq a)\tag{3}$$

と書き表せること（注意：逆三角関数の一般的な定義では,「$u=\arcsin\ v$」と「$v=\sin\ u$ かつ $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$」が同値である）, および,

$$\cos t\geq 0\qquad\therefore\quad\cos\ t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\tag{4}$$

が成り立つことを使って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int\sqrt{a^2-x^2}\ \frac{dx}{dt}\ dt\qquad(\because\ \text{置換積分})&(5)\\
&=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ \left(\frac{d}{dt}a\sin\ t\right)dt\qquad\left(\because\ \text{式}\ (1)\right)&(6)\\
&=\int a\sqrt{1-\sin^2 t}\ a\cos\ tdt\qquad\left(\because\ (\sin\ t)'=\cos\ t\right)&(7)\\
&=a^2\int\cos^2 tdt\qquad\left(\because\ \text{式}\ (4)\right)&(8)\\
&=a^2\int\frac{1+\cos\ 2t}{2}dt\qquad(\because\ \text{半角公式}\ \cos^2\tfrac{\theta}{2}=\tfrac{1+\cos\ \theta}{2}\ \text{で}\ \theta=2t\ \text{としたものを使った})&(9)\\
&=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin\ 2t\right)+c\qquad(c\ \text{は積分定数})&(10)
\end{aligned}$$

を得る．式 (10) に現れる t を全て x で表せば答となる．ただし $\sin\ 2t$ については, 単に式 (3) を代入して得られる $\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)$ のような取り扱いのしにくい表式で答えるのではなく,

$$\sin\ 2t=2\ \sin\ t\ \cos\ t=2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\tag{11}$$

のように扱いやすい簡明な形で表せることに気づいて欲しい．式 (3), (11) を式 (10) に代入して下記の答を得る.

$$\begin{aligned}
F(x)&=a^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+c&(12)\\
&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c\qquad(\text{答})&(13)
\end{aligned}$$