無理関数の不定積分の計算例 No.1

—「2 次の項の係数が正である 2 次式」の平方根が被積分関数に含まれる場合 —

【問題】　不定積分　$F(x) = \int \sqrt{x^2+a}\ dx$　を求めよ．ただし a は実数の定数とする ($-\infty < a < \infty$).

【解答】

平方根内の x^2 の項の係数が正である場合の定石に従い,

$$t = \sqrt{x^2+a}\ +\ x \tag{1}$$

と置く ($t = \sqrt{x^2+a}\ -\ x$ と置いても求まる）．式 (1) の右辺にある x を左辺に移項して得た

$$t - x = \sqrt{x^2+a} \tag{2}$$

の両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned}
t^2 - 2tx + x^2 &= x^2 + a \quad \text{（両辺にある } x^2 \text{ が相殺することに注目）} && (3)\\
2tx &= t^2 - a \quad (x \text{ については 1 次式であることに注目)} && (4)\\
x &= \frac{t^2-a}{2t} \quad (x \text{ を } t \text{ で表す際に}\surd\text{が不要なことに注目）} && (5)
\end{aligned}$$

を得る．式 (5) の両辺を t で微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{(t^2-a)'\cdot 2t - (t^2-a)\cdot(2t)'}{(2t)^2} && (6)\\
&= \frac{2t\cdot 2t - (t^2-a)\cdot 2}{(2t)^2} && (7)\\
&= \frac{4t^2 - 2t^2 + 2a}{4t^2} && (8)\\
&= \frac{2t^2+2a}{4t^2} && (9)\\
&= \frac{t^2+a}{2t^2} && (10)
\end{aligned}$$

を得る．従って,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \sqrt{x^2+a}\ dx && (11)\\
&= \int (t-x)\frac{dx}{dt}\,dt \quad \big(\because \text{ 式 (2) および置換積分法}\big) && (12)\\
&= \int \left(t - \frac{t^2-a}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt \quad \big(\because \text{ 式 (5) および式 (10)}\big) && (13)\\
&= \int \frac{2t^2-t^2+a}{2t}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt && (14)\\
&= \int \frac{(t^2+a)(t^2+a)}{2t\cdot 2t^2}\,dt && (15)\\
&= \tfrac{1}{4}\int \frac{(t^2+a)^2}{t^3}\,dt && (16)\\
&= \tfrac{1}{4}\int \frac{t^4+2at^2+a^2}{t^3}\,dt && (17)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{4}\int\left(t+\frac{2a}{t}+\frac{a^2}{t^3}\right)dt && (18)\\
&= \frac{t^2}{8}+\frac{a}{2}\log|t|-\frac{a^2}{8t^2}+c \qquad (c\text{ は積分定数}) && (19)\\
&= \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{a^2}{t^2}\right)+\frac{a}{2}\log|t|+c && (20)
\end{aligned}
$$

を得る．式 (1) を式 (20) に代入すると答が得られるが, その準備としてまず第 1 項を整理しておく.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{t} &= \frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} \qquad (\because \text{ 式 } (1)) && (21)\\
&= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)} \qquad (\text{分母と分子に同一の項を乗じた}) && (22)\\
&= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}\right)^2-x^2} \qquad (\text{その結果として分母が有理化される（}\surd\text{が消える）}) && (23)\\
&= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{x^2+a-x^2} && (24)\\
&= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{a} && (25)\\
&= \sqrt{x^2+a}-x && (26)
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
t^2-\frac{a^2}{t^2} &= t^2-\left(\frac{a}{t}\right)^2 && (27)\\
&= \left(\sqrt{x^2+a}+x\right)^2-\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)^2 \qquad (\because \text{ 式 } (1) \text{ および式 } (26)) && (28)\\
&= \left\{\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)-\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)\right\}\left\{\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)+\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)\right\} && (29)\\
&= 2x\cdot 2\sqrt{x^2+a} && (30)\\
&= 4x\sqrt{x^2+a} && (31)
\end{aligned}
$$

を得る．式 (1) および式 (31) を式 (20) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{8}\cdot 4x\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+c && (32)\\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+c \qquad (\text{答}) && (33)
\end{aligned}
$$

を得る．

[補足] 式 (1) の代わりに $t=\sqrt{x^2+a}-x$ と置いて計算した場合の結果は

$$F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}-\frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}-x\right|+c \tag{34}$$

である．式 (34) を式 (33) に一致する形に変形するには, 対数関数の性質「$A>0, B>0$ のとき $\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$」, および, 式 (21)〜式 (26) で示された

$$\sqrt{x^2+a}-x=\frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} \tag{35}$$

を利用して,

$$\log\left|\sqrt{x^2+a}-x\right|=-\log\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+a}-x}\right|=-\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{a}\right|=-\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+\log|a| \tag{36}$$

という式変形を行い, $-\frac{a}{2}\log|a|$ を c に繰り込めばよい.