有理関数の不定積分の計算例 (分母が重根を持つ場合)

【問題】　不定積分　$F(x) = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$　を求めよ.

【解答】

$\boxed{\text{ステップ 1}}$ 被積分関数の分子の多項式の次数 2 は 分母の多項式の次数 3 より小さいので, 何もせずに進む.

$\boxed{\text{ステップ 2}}$ 分母の多項式は既に 1 次式の積の形に完全に因数分解されているので, 何もせずに進む.

$\boxed{\text{ステップ 3}}$

本問題の被積分関数は, 別紙配布資料で述べたように, A, B, C を定数として,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{1}$$

の形に部分分数分解できる. 両辺に $(x-1)(x+1)^2$ を掛けると,

$$\begin{aligned} x^2+1 &= A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) &(2)\\ &= (A+B)x^2 + (2A+C)x + A - B - C &(3)\end{aligned}$$

と成るので,

$$\begin{aligned} A+B &= 1 &(4)\\ 2A+C &= 0 &(5)\\ A-B-C &= 1 &(6)\end{aligned}$$

を満たす A, B, C の値の組を見つけることができれば, その形に変形できることを確かめたことになる. (4)+(5)+(6) より, $4A = 2$, $\therefore\ A = \frac{1}{2}$. これを (4) に代入して $B = 1 - A = \frac{1}{2}$. (5) に代入して $C = -2A = -1$. このようにして下記の部分分数分解結果を得ることができた.

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \tag{7}$$

[補足]

試験答案を採点していると, 式 (1) の右辺の 2 番目の項（係数 B の掛けられた項）に相当する項を忘れる間違いを良く見かける. そうなりそうな人は, まず「分母が n 次式の項の分子は $n-1$ 次式にする」と覚えると良い. 即ち,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B'x+C'}{(x+1)^2} \tag{8}$$

の形が, 基本的な分解方法なのである. しかし, 上式の右辺第 2 項は不定積分が即座に書き下せるような形をしていないので,

$$\frac{B'x+C'}{(x+1)^2} = \frac{B'(x+1)-B'+C'}{(x+1)^2} = \frac{B'}{x+1} + \frac{C'-B'}{(x+1)^2} \tag{9}$$

と変形し, B', C' の代わりに, $B=B'$, $C=C'-B'$ を未知数として決定することにしたのが式 (1) であるというふうに理解しておけば項を忘れることは起きにくくなるであろう.

$\boxed{\text{ステップ 4}}$

部分分数分解後の各項を積分すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \int\frac{dx}{(x+1)^2} && (10)\\ &= \tfrac{1}{2}\log|x-1| + \tfrac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c && (11)\\ &= \frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right| + \frac{1}{x-1} + c \qquad (\because\ \log a + \log b = \log ab) && (12) \end{aligned}$$

を得る. ただし c は積分定数である.

$\boxed{\text{ステップ 5}}$

計算ミスの可能性があるため, 積分結果を微分して被積分関数に一致することを確認することが望ましい.

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} \quad (\text{一致}) \tag{13}$$