有理関数の不定積分の計算例

【問題】　不定積分　$F(x)=\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$　を求めよ.

【解答】

n を自然数とし, c_i $(i=1,\cdots,n)$ を実数の定数として, 変数 x の n 次の多項式とは, $c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ の形の数式のことである. そして, 有理関数（有理式）とは, $\dfrac{\text{(多項式)}}{\text{(多項式)}}$ の形の関数（数式）のことである. 任意の有理関数の不定積分は, 以下の計算例で述べるような手順に従えば, 必ず求めることができる.

$\boxed{\text{ステップ 1}}$

被積分関数の分子の多項式の次数は 4 , 分母の多項式の次数は 3 である. このように,（分子の次数）≧（分母の次数）のときは, まず, 多項式の割り算を行って, 被積分関数を （分子の次数）＜（分母の次数）に変える.

そのためには, 下記のように, 多項式の「積み算」の形で求めれば, 計算間違いが少ないだろう.

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & x & -1 & & & \\
\hline
x^3+x^2+x+1\,\big) & x^4 & & +x^2 & & +1 \\
 & x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & \\
\hline
 & & -x^3 & & -x & +1 \\
 & & -x^3 & -x^2 & -x & -1 \\
\hline
 & & & x^2 & & +2
\end{array}
\tag{1}
$$

この積み算の計算結果から, 下記の等式を得る.

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}=x-1+\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1} \tag{2}$$

[補足] もし分母や分子が因数分解した形で与えられたときは, それぞれを展開してから, 積み算をせよ.

$\boxed{\text{ステップ 2}}$

一般に, 実係数の（即ち, 係数が実数の）多項式は, 何個かの（実係数の） 1 次式, および, 何個かの判別式が負の（実係数の） 2 次式の積の形に因数分解できるという定理が成り立つ. ステップ 2 では分母の多項式をこの形になるまで完全に因数分解する.

変数 x に或る値 a を代入すると多項式の値がゼロになるなら, その多項式は $(x-a)$ で割り切れる（$(x-a)$ を因子に持つとも言う）. 本問題の場合は, 分母の多項式 x^3+x^2+x+1 に $x=-1$ を代入すると,

$$x^3+x^2+x+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0 \tag{3}$$

なので, 分母の多項式は $(x+1)$ を因子に持つ. 実際, 下式の通りである.

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1) \tag{4}$$

x^2+1 は判別式の値 $(=-4)$ が負なので (言い換えると, $x^2+1\geq 1>0$ ゆえに $x^2+1=0$ を満たす実数が存在しないので), 実係数の範囲ではこれ以上因数分解できないから, 式 (4) でこのステップの目的を達したことになる.

$\boxed{\text{ステップ 3}}$

被積分関数の有理式の部分を部分分数分解（教科書での呼称は部分分数展開）する.

本問題の場合は, 別紙配布資料で述べたように, A, B, C を定数として,

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{5}$$

の形へと部分分数分解という名の式変形ができる. 両辺に $(x+1)(x^2+1)$ を掛けると,

$$\begin{aligned} x^2+2 &= A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1) \quad (6)\\ &= (A+B)x^2+(B+C)x+A+C \quad (7)\end{aligned}$$

と成るので,

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \quad (8)\\ B+C &= 0 \quad (9)\\ A+C &= 2 \quad (10)\end{aligned}$$

を満たす A, B, C の値の組を見つけることができれば, その形に変形できることを確かめたことになる. (8)−(9)+(10) より, $2A=3$, $\therefore\ A=\frac{3}{2}$. これを (8) に代入して $B=1-A=-\frac{1}{2}$. (9) に代入して $C=2-A=\frac{1}{2}$. このようにして下記の部分分数分解結果を得ることができた.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} \tag{11}$$

ステップ 4

部分分数分解後の各項を積分すると，

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(x - 1 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) dx & (12) \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}I_1 + \tfrac{1}{2}I_2 & (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{x^2+1}\,dx &&= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c_1 & (14) \\ I_2 &= \int \frac{dx}{x^2+1} &&= \arctan x + c_2 & (15) \end{aligned}$$

となる．即ち，答は，

$$\begin{aligned} F(x) = &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + c_1\right) + \tfrac{1}{2}(\arctan x + c_2) & (16) \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{4}\log(x^2+1) + \tfrac{1}{2}\arctan x + c & (17) \end{aligned}$$

である．ただし $c\ (= -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2)$ は積分定数である．

ステップ 5

計算ミスをしたかもしれないので，積分結果を微分して，問題の積分の被積分関数に一致することを確認するのが望ましい．

$$\begin{aligned} F'(x) &= x - 1 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} & (18) \\ &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1) + \frac{3}{2}(x^2+1) - \frac{1}{4}\cdot 2x(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} & (19) \\ &= \frac{x^4 - 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{(x+1)(x^2+1)} & (20) \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x+1)(x^2+1)} \quad \text{（一致した）} & (21) \end{aligned}$$