福井大学 工学部
電・情・知 1 年生

微分積分 II(a) 中間試験問題•答案用紙

2015 年 12 月 15 日 1 限実施

【全般的注意事項】解答に際しては, 最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また, 積分定数として断り書きなしに c, c', c'' 等の記号を用いてよい。なお, 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが, 答案では arc$\cdots$ の形で書け。

$\boxed{1}$ 小問 1)〜3) に示した不定積分 I_1, I_2, I_3 を求めよ。(5 点× 3 問=15 点)

1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$　　2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{(x+1)^2+1}{(x-1)^2+1}dx$　　3) $I_3 = \displaystyle\int \arctan x \, dx$

$\boxed{2}$ f を任意の 1 変数関数、f' をその 1 次 (階) 導関数とするとき、不定積分 $I = \displaystyle\int f'(x)\cos^2 f(x)\,dx$ を求めよ。(10 点)

$\boxed{3}$ $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^t \sin t\,dt$　および　$G(x) = \displaystyle\int_0^x e^t \cos t\,dt$　を求めよ。(10 点)

学科	学籍番号								氏名	得点	[1]	[2]	[3]	本頁小計	全頁合計

$\boxed{4}$ f を任意の 1 変数関数とするとき、$g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^3}^{1} \dfrac{f\left(\sqrt{t}\right)}{t}\,dt$ を求めよ。(10 点)

$\boxed{5}$ 下記の (ア)〜(オ) の記号を付した広義積分のうち、有限値をもつものの記号を全て挙げよ（理由は不要）。また有限値をもつ広義積分のなかから、ひとつ (どれでもよい) を選び、その値を計算せよ（計算式は必要）。(10 点)

(ア)$= \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$　(イ)$= \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$　(ウ)$= \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$　(エ)$= \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$　(オ)$= \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3+1}}$

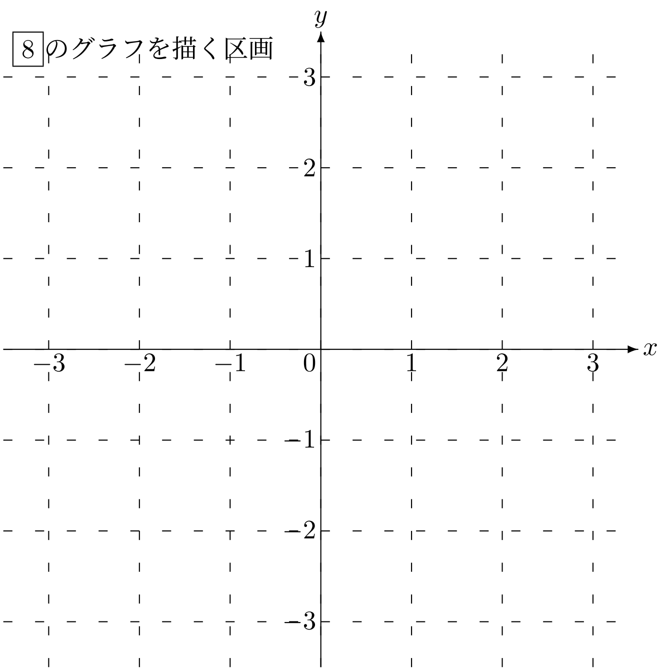
$\boxed{6}$ 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{1-\cos x + \sin x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx$ を求めよ。(15 点)

学科	学籍番号	氏名	得点 [4]	[5]	[6]	本頁小計

$\boxed{7}$ α を正の実数の定数として、$I_n = \displaystyle\int x^n (x+1)^\alpha \, dx$ と定義される一群の不定積分 I_n について、n を正の整数とするとき、I_n を I_{n-1} を使って表す漸化式を作れ。(15 点)

$\boxed{8}$ 極座標表示された曲線 $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin\dfrac{\theta}{2}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の概形を右下の区画に描け。また、その長さ L を計算せよ。(15 点)

$\boxed{8}$ のグラフを描く区画



学科	学籍番号								氏名	得点 [7]	[8]	本頁小計

$\boxed{1}$ (1) $3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x+1)+1 = 4-(x+1)^2 = 2^2\left\{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right\}$

$t = \frac{x+1}{2}$ とおくと. $3-2x-x^2 = 2^2(1-t^2)$, $dx = 2\,dt$,

$I_1 = \int \frac{2\,dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin \frac{x+1}{2} + c$ (答)

(2) $t = x-1$ とおくと $dx = dt$, $x+1 = t+2$

$$I_2 = \int \frac{(t+2)^2+1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+4t+5}{t^2+1}\,dt = \int \frac{(t^2+1)+4t+4}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int \left(1 + 2\cdot\frac{2t}{t^2+1} + 4\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt = t + 2\log(t^2+1) + 4\arctan t + c$$

$$= x-1 + 2\log\{(x-1)^2+1\} + 4\arctan(x-1) + c$$

$$= x + 2\log(x^2-2x+2) + 4\arctan(x-1) + c'$$ (答) $(c' = c-1)$

(3) $I_3 = \int 1\cdot \arctan x\,dx$

$$= \int x'\cdot \arctan x\,dx$$

$$= x\arctan x - \int x(\arctan x)'\,dx$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$$ (答)

$\boxed{2}$ $I = \int \cos^2 f(x)\, f'(x)\,dx$ (注意: 部分積分をしても積分は求まりません。置換積分をする必要があります.)

$$= \int \cos^2 t \frac{dt}{dx}\,dx$$ ($t = f(x)$ とおいた)

$$= \int \cos^2 t\,dt$$ ここまでで4点与える.

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$ (半角公式を使用した)

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c$$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4}\sin 2f(x) + c$$ (答)

3

$$F(x) = \int_0^x e^t \sin t \, dt = \int_0^x (e^t)' \sin t \, dt \quad (\because (e^t)' = e^t)$$

$$= \left[e^t \sin t \right]_0^x - \int_0^x e^t (\sin t)' dt \quad (\because \text{部分積分法を使った})$$

$$= e^x \sin x - \int_0^x e^t \cos t \, dt$$

$$= e^x \sin x - G(x) \quad \text{----①}$$

$$G(x) = \int_0^x e^t \cos t \, dt = \int_0^x (e^t)' \cos t \, dt$$

$$= \left[e^t \cos t \right]_0^x - \int_0^x e^t (\cos t)' dt$$

$$= e^x \cos x - 1 + \int_0^x e^t \sin t \, dt$$

$$= e^x \cos x - 1 + F(x) \quad \text{---②}$$

②を①の右辺に代入すると

$$F(x) = e^x \sin x - e^x \cos x + 1 - F(x)$$

$$2F(x) = e^x (\sin x - \cos x) + 1$$

$$F(x) = \frac{e^x (\sin x - \cos x) + 1}{2} \quad \text{(答)}$$ 5点

これを②の右辺に代入すると

$$G(x) = e^x \cos x - 1 + \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \frac{e^x (\sin x + \cos x) - 1}{2} \quad \text{(答)}$$ 5点

4 $h(t)=\int \frac{f(\sqrt{t})}{t}dt$ とおくと、 $h'(t)=\frac{f(\sqrt{t})}{t}$.

微分積分学の基本定理により

$$g(x)=\frac{d}{dx}\{h(1)-h(x^3)\}$$

$$=0-\frac{d\,h(x^3)}{d(x^3)}\cdot\frac{d(x^3)}{dx}$$

$$=-h'(x^3)\cdot 3x^2$$

$$=-3x^2\frac{f(\sqrt{x^3})}{x^3}=-\frac{3f(x\sqrt{x})}{x}$$ (答)

5 答：(ウ), (エ), (オ) …5点 （理由は補足説明として後述する）

値は $(ウ)=\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $\left(t=\sqrt{x+1}\text{ とおくと、}dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}},\ x=t^2-1\right.$ $x=1$ で $t=\sqrt{2}$, $x\to\infty$ で $t\to\infty$)

$$=\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2dt}{t^2-1}$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^\infty\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left[\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{t=\sqrt{2}}^{t=\infty}$$

$$=\log 1-\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$ (答)

$$=2\log(\sqrt{2}+1)$$ (答) 5点、

$(エ)=\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ $\left(t=\sqrt{x-1}\text{ とおくと、}dt=\frac{dx}{2\sqrt{x-1}},\ x=t^2+1\right.$ $x=1$ で $t=0$, $x\to\infty$ で $t\to\infty$)

$$=\int_0^\infty\frac{2dt}{t^2+1}=2\left[\arctan t\right]_{t=0}^{t=\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$ (答) 5点、

(オ) は（少なくとも簡単には）求まらないと思われます。

（数値積分で求めると約 0.233 という有限値が得られます。）

6

$t = \tan\frac{x}{2}$ 1点 とおくと、$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 2点, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ 2点, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ 2点 なので

$$I = \int \frac{1-\cos x + \sin x}{(1+\cos x)\sin x} \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$= \int \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2t^2+2t}{2t}\, dt = \int (t+1)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + t + C = \frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + C \quad (答)$$

$$= \frac{(\sin x + 2\cos x + 2)(1-\cos x)}{2\sin x\,(1+\cos x)} + C \quad (答)$$ 15点

7

$$I_n = \int x^n (x+1)^\alpha dx$$

$$= x^n \frac{1}{\alpha+1}(x+1)^{\alpha+1} - \int n x^{n-1} \frac{1}{\alpha+1} \underbrace{(x+1)^{\alpha+1}}_{=(x+1)(x+1)^\alpha} dx \quad (\because \alpha > 0 より \alpha+1 \neq 0)$$ ここまでで5点

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^n (x+1)^{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} \int x^{n-1} (x+1)(x+1)^\alpha dx$$

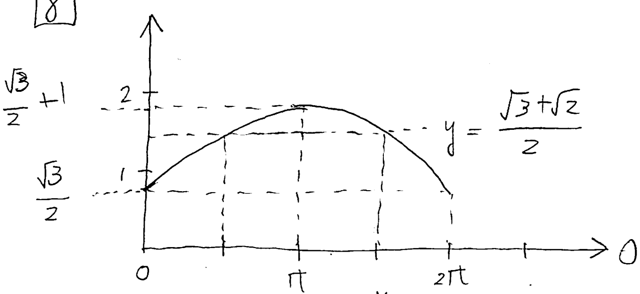
$$= \frac{1}{\alpha+1} x^n (x+1)^{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} \int (x^n + x^{n-1})(x+1)^\alpha dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^n (x+1)^{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} (I_n + I_{n-1})$$

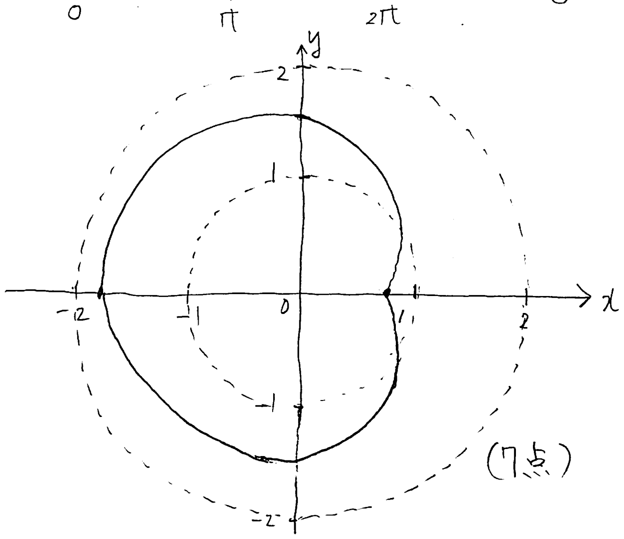
$$\therefore \left(1 + \frac{n}{\alpha+1}\right) I_n = \frac{1}{\alpha+1} x^n (x+1)^{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha+n+1}\left\{x^n (x+1)^{\alpha+1} - n I_{n-1}\right\}$$ 答 $(\because \alpha > 0,\ n > 0$ より $\alpha+n+1 \neq 0)$

8



より $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を使って



（7点）

配点（合計7点）

・座標原点を一重に囲む輪の形 --- 1点

・x軸と $0<x<1$ で交わる --- 1点

・y軸と $1<y<2$ で交わる --- 1点

を得る。

・x軸と $-2<x<-1$ で交わる --- 1点

・y軸と $-2<y<-1$ で交わる --- 1点

・x軸との $0<x<1$ での交点でへこむ ---- 2点

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}}_{=\,1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\, d\theta$$ ここまでで5点

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad \left(\because \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \leqq 1 \text{ より } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2} > 0\right)$$

$$= \left[\theta - \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= 2\pi - \sqrt{3}(-1-1)$$

$$= 2(\pi + \sqrt{3})$$ （答） 8点

$\boxed{1}$ (1) の別解法

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(3+x)(1-x)}}$$

上式の被積分関数の分母の根号の中身が零以上であることより

$$(3+x)(1-x) \geqq 0 \qquad \therefore\ -3 \leqq x \leqq 1 \qquad \therefore\ 3+x \geqq 0,\ 1-x \geqq 0$$

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{3+x}{(3+x)^2(1-x)}}\,dx = \int \frac{1}{3+x}\sqrt{\frac{3+x}{1-x}}\,dx.$$

$t = \sqrt{\dfrac{3+x}{1-x}}$ とおくと. $\quad t^2 = \dfrac{3+x}{1-x} \qquad \therefore\ x = \dfrac{t^2-3}{t^2+1}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8t}{(t^2+1)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{3+\underset{\overset{\|}{\frac{t^2-3}{t^2+1}}}{x}}\ \underset{\overset{\|}{t}}{\sqrt{\frac{3+x}{1-x}}}\ \underset{\overset{\|}{\frac{8t}{(t^2+1)^2}}}{\frac{dx}{dt}}\,dt$$

$$I_1 = \int \frac{8t^2}{\left(3+\frac{t^2-3}{t^2+1}\right)(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= 2\arctan t + C$$

$$= 2\arctan\sqrt{\frac{3+x}{1-x}} + C \quad (答)$$

$\boxed{補足}$ $-1 \leqq x \leqq 1$ に対し

$$\arcsin x = 2\arctan\frac{1+x}{1-x} - \frac{\pi}{2}$$

が成立することが示せる。これを利用すると.

$$2\arctan\sqrt{\frac{3+x}{1-x}} = \arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{\pi}{2}$$

と書き直すことができる。

$\boxed{5}$ 広義積分(ア)〜(オ)の収束・発散の判定方法

工学部生としては、以下のような略式の考え方で素速く判定して欲しいと思います。

(ア) $x \to +\infty$ で $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \approx \dfrac{1}{x}$ なので積分は発散する.

(イ) $x \to 1+0$ で $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ なので積分は収束する.

$x \to +\infty$ で $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \approx \dfrac{1}{x}$ なので積分は発散する.

ゆえに (イ) は発散する.

(ウ) $x \to +\infty$ で $\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}} \approx \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ なので積分は収束する.

(エ) $x \to 1+0$ で $\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ なので積分は収束する.

$x \to +\infty$ で $\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} \approx \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ なので積分は収束する

ゆえに (エ) は収束する.

(オ) $x \to +\infty$ で $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^3+1}} \approx \dfrac{1}{x^{9/2}}$ なので積分は収束する。

$\boxed{\text{補足}}$ 上では $b > 0$ として

$\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x^a}$ は $a<1$ で収束, $a \geqq 1$ で発散.

$\displaystyle\int_b^\infty \frac{dx}{x^a}$ は $a>1$ で収束, $a \leqq 1$ で発散

することを利用しています。

5 広義積分の収束の判定法の追加の説明

$(カ) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-1}}$ について 前頁の略式の推論を

もう少し親切に述べ直してみましょう。 $1<a<b$ として

$(カ) = I_1 + I_2 + I_3$, $I_1 = \int_1^a \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-1}}$, $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-1}}$, $I_3 = \int_b^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3+1}}$

と分割します。

まず, $a \leq x \leq b$ で $\frac{1}{x^3\sqrt{x^3-1}}$ は有界なので (詳しく言えば $\frac{1}{b^3\sqrt{b^3-1}} \leq \frac{1}{x^3\sqrt{x^3-1}} \leq \frac{1}{a^3\sqrt{a^3-1}}$ なので)

I_2は有界です。

次に、I_1は $0<a-1 \ll 1$ ととれば $1 \leq x \leq a$ で

$x^3\sqrt{x^3-1} = x^3\sqrt{(x^2+x+1)(x-1)} \approx 1\cdot\sqrt{(1+1+1)(x-1)} = \sqrt{3}\sqrt{x-1}$

なので $I_1 \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ は有界です。……①

最後に I_3は $b \gg 1$ ととれば $x \geq b$ で

$x^3\sqrt{x^3-1} \approx x^3\sqrt{x^3} = x^{9/2}$ なので $I_3 \approx \int_b^\infty \frac{dx}{x^{9/2}}$ は有界です。……②

従って I_1, I_2, I_3 は全て有界なので、その和の(カ)も有界です。

上の①と②が前頁の略式の理由付けを詳しく言い直したものです。

---

①や②をより厳密に言い直すのは簡単です。例えば下記のように言えばよいでしょう。工学部生はこのような証明をする必要はありません。かわりに略式の考え方を自信をもってできるようには、なる必要があります。

①は: $1 \leq x \leq a$ で $x^3\sqrt{x^3-1} = x^3\sqrt{(x^2+x+1)(x-1)} \geq 1^3\sqrt{(1^2+1+1)(x-1)}$

$= \sqrt{3}\sqrt{x-1}$ $\quad \therefore \frac{1}{x^3\sqrt{x^3-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{x-1}}$

(注) このxも1でおきかえると0になり次の変形ができなくなる。

$\therefore I_1 = \int_1^a \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a-1}$ $\quad \therefore I_1$は有界

②は: $x \geq b$ で $x^3\sqrt{x^3-1} \geq x^3\sqrt{b^3-1}$ ((注) $x^3\sqrt{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{b^3}}$ や $x^2 b\sqrt{1-b^2}$ でもよい)

$\therefore \frac{1}{x^3\sqrt{x^3-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{b^3-1}}\cdot\frac{1}{x^3}$

$\therefore I_3 = \int_b^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{b^3-1}}\int_b^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2\sqrt{b^3-1}}$ $\quad \therefore I_3$は有界