微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　(全 4 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 電気・情報・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 鈴木・田嶋・堀邊,　平成 27 年 2 月 3 日 1 限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問 (1)〜(3) に示した不定積分 I_1,I_2 および定積分 I_3 を求めよ。(10 点× 3 問=30 点)

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$　(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{e^x+2}$　(3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 27 年 2 月 3 日	出題者: 鈴木・田嶋 堀邊	学 科	学籍番号								氏 名	得 点　/30

$\boxed{2}$ 下記の小問 (1),(2) に答えよ (7 点+3 点=10 点)

(1) 不定積分 $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 4x}$ を求めよ。　　(2) 広義積分 $I = \displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^3 - 4x}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\, dx$ と定義する。任意の $n \geq 2$ で成立する「I_n を I_{n-2} を用いて表す漸化式」を求めよ。(10 点)

$\boxed{4}$ 小問 (1)〜(3) に示した 2 重積分 I_1〜I_3 の値を求めよ。（10 点× 3 問=30 点）

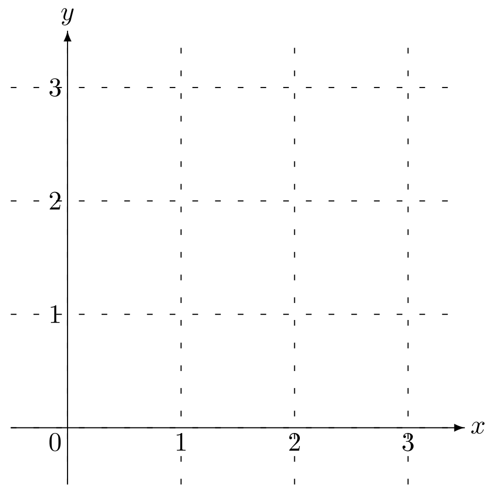
(1) $I_1 = \displaystyle\int_{D_1} \frac{1}{x+y}\, dxdy, \quad D_1 = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_{D_2} x^2 y\, dxdy, \quad D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

(3) $I_3 = \displaystyle\int_{D_3} x\, dxdy, \quad D_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq y,\ x \geq 0\}$

$\boxed{5}$ 下記の等式が任意の $f(x,y)$ に対して成立するような領域 D を図示し、また, $\boxed{?}$ に適切な数または数式を入れて右辺を完成させよ。(図 4 点+穴埋 6 点=10 点)

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{?}}^{3} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx$$



答：　(右辺)= $\int_0^{\boxed{}} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{}}^{3} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)\,dx$

$\boxed{6}$ 　曲線 $y = x^2$ $(0 \le x \le \frac{1}{2})$ の長さ L を求めよ。必要ならば下記の不定積分の公式を使ってよい。(10 点× 1 問=10 点)

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$$

微分積分II　定期試験　問題・答案用紙　（全4頁中の第1頁目）

福井大学工学部 電気・情報・知能 工学科 1年生対象, 担当教員 鈴木・田嶋・堀邊,　2015年2月3日1限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問 (1)〜(3) に示した不定積分 I_1, I_2 および定積分 I_3 を求めよ。(10点× 3問=30点)

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$　　(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{e^x+2}$　　(3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{d(\sin x)}{1+\sin x} = \log(1+\sin x) + C$ (答)

(2) $t = e^x$ とおくと、$dt = e^x dx$, $dx = \dfrac{dt}{t}$

$\therefore I_2 = \displaystyle\int \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{2}\log|t+2| + C$

$= \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{t}{t+2}\right| + C = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{e^x}{e^x+2} + C$ (答)

または $= \dfrac{1}{2}\log e^x - \dfrac{1}{2}\log(e^x+2) + C = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\log(e^x+2) + C$ (答)

(3) $t = \dfrac{x^2}{2}$ とおくと　$dt = x\,dx$,　$0 \leqq x \leqq 1$ は $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ に対応する.

$\therefore I_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\Big[\arcsin t\Big]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{12}$ (答)

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成27年 2月3日	出題者: 鈴木・田嶋 堀邊	学科	学籍番号	氏名	得点 /30

$\boxed{2}$ 下記の小問 (1),(2) に答えよ (7 点+3 点=10 点)

(1) 不定積分 $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 4x}$ を求めよ。　(2) 広義積分 $I = \displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 4x}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\, dx$ と定義する。任意の $n \geq 2$ で成立する「I_n を I_{n-2} を用いて表す漸化式」を求めよ。(10 点)

$\boxed{2}$

(1) $\dfrac{1}{x^3-4x} = \dfrac{1}{x(x+2)(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$ とおくと.

$$1 = (A+B+C)x^2 + (-2B+2C)x - 4A$$

$\therefore$ $A+B+C=0$, $-2B+2C=0$, $-4A=1$

$\therefore$ $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = C = \dfrac{1}{8}$

$$F(x) = \int\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{8}\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$= -\dfrac{1}{4}\log|x| + \dfrac{1}{8}\log|x+2| + \dfrac{1}{8}\log|x-2| + C$ (答)　← 7点.

$= \dfrac{1}{8}\log\dfrac{|x^2-4|}{x^2} + C$ (答)

(2) $3 \leq x < \infty$ で $\dfrac{1}{x^3-4x}$ は連続なので

$I = \displaystyle\lim_{\beta\to\infty} F(\beta) - F(3) = \frac{1}{8}\log 1 - \frac{1}{8}\log\frac{5}{9} = \frac{1}{8}\log\frac{9}{5}$ (答)　← 3点.

$\boxed{3}$ $I_n = \displaystyle\int \cos^{n-1}x \cos x\, dx$

$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\displaystyle\int \cos^{n-2}x \sin^2 x\, dx$

$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\displaystyle\int \cos^{n-2}x (1-\cos^2 x)\, dx$

$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

$\therefore$ $I_n = \dfrac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ (答)

$\boxed{4}$ 小問 (1)〜(3) に示した2重積分 I_1〜I_3 の値を求めよ。(10点×3問=30点)

(1) $I_1 = \displaystyle\int_{D_1} \frac{1}{x+y}\,dxdy$,　$D_1 = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_{D_2} x^2 y\,dxdy$,　$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

(3) $I_3 = \displaystyle\int_{D_3} x\,dxdy$,　$D_3 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le y,\ x \ge 0\}$

(1) $I_1 = \displaystyle\int_1^2 dx \int_0^1 dy\, \frac{1}{x+y} = \int_1^2 dx\, \Big[\log|x+y|\Big]_{y=0}^{y=1} = \int_1^2 dx\, \{\log(x+1) - \log x\}$

$= \Big[(x+1)\log(x+1) - x\log x\Big]_{x=1}^{x=2} = 3\log 3 - 2\log 2 - (2\log 2 - 1\log 1)$

$= 3\log 3 - 4\log 2$ (答)

$= \log\dfrac{27}{16}$ (答)

(2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, x^2 y = \int_0^1 dx \cdot x^2 \frac{1}{2}\Big[y^2\Big]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(x^3 - x^6)$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{7}x^7\Big]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{7}\Big) = \dfrac{3}{56}$ (答)

(注意) xの積分範囲は、$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 1$ かつ $x^2 \leqq \sqrt{x}\}$ である。$0 \leqq x \leqq$ で $x^2 \leqq \sqrt{x}$ が成り立つので結局, $0 \leqq x \leqq 1$ が積分範囲となる。

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと. Dは $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq r \leqq \sin\theta$ と表される.

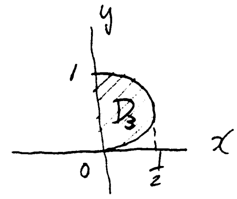
$I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sin\theta} dr \cdot r \cdot r\cos\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \cos\theta \cdot \Big[\frac{1}{3}r^3\Big]_{r=0}^{r=\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin^3\theta\cos\theta$

$= \dfrac{1}{3}\Big[\dfrac{1}{4}\sin^4\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$

$= \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{4} - 0\Big) = \dfrac{1}{12}$ (答)



$x^2 + y^2 \leqq y$

$r^2 \leqq r\sin\theta$

$r \geqq 0$ なので $r \leqq \sin\theta$

微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全4頁中の第4頁目）

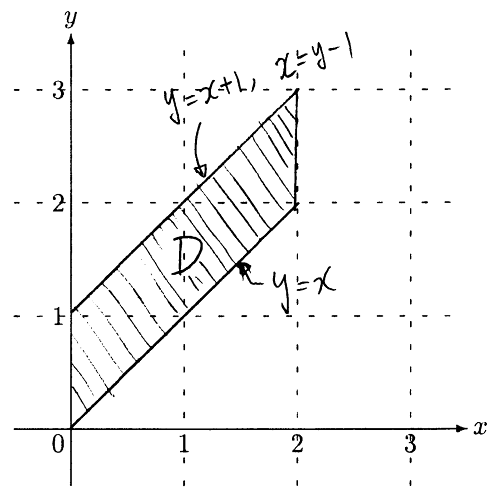
福井大学工学部 電気・情報・知能 工学科 1年生対象, 担当教員 鈴木・田嶋・堀邊,　2015年2月3日1限実施

$\boxed{5}$ 下記の等式が任意の $f(x,y)$ に対して成立するような領域 D を図示し、また, $\boxed{?}$ に適切な数または数式を入れて右辺を完成させよ。(~~10点×1問~~=10点)
4点 +6点

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{?}}^{3} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx$$

説明が書いていなくても減点しない。

4点 →



2点　　2点　　2点

答：　(右辺)= $\int_0^{\boxed{1}} dy \int_{\boxed{0}}^{\boxed{y}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} dy \int_{\boxed{y-1}}^{\boxed{y}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{2}}^{3} dy \int_{\boxed{y-1}}^{\boxed{2}} f(x,y)\,dx$

$\boxed{6}$ 曲線 $y=x^2$ $(0 \le x \le \frac{1}{2})$ の長さ L を求めよ。必要ならば下記の不定積分の公式を使ってよい。(10点×1問=10点)

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$t=2x$ とおくと $dt=2dx$, $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ は $0 \leqq t \leqq 1$ に対応する.

$$\therefore L = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}) - 0 - \log 1\right) = \frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{4} \quad (答)$$

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成27年 2月3日	出題者: 鈴木・田嶋 堀邊	学科	学籍番号	氏名	(第4頁目) 得点 /20

［別解］　以下のような解法でも答は求まりますが、おすすめしたい解き方ではありません。

$\boxed{\text{II}}$ (1)　$t=\tan\frac{x}{2}$ とおいて置換積分すると $I_1=\log\dfrac{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}{\tan^2\frac{x}{2}+1}+C$ となる。

これは $\log(1+\sin x)+C$ と、Cも含めて正確に同値な数式です。

$\boxed{\text{II}}$ (3)　$t=x^2$ とおいた人は、$I_3=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$ を得る。

これを不定積分の公式 $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C$ に帰着させるために

$u=\frac{t}{2}$ とおくと　$I_3=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{1/2}\frac{2\,du}{\sqrt{4-4u^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$$=\frac{1}{2}\Big[\arcsin u\Big]_{u=0}^{u=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arcsin 0$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{\pi}{12}$$

中間の変数 t を使わずに求めると、$u=\frac{t}{2}=\frac{x^2}{2}$ と置くことになるが、それがまさに最初に示した解法である。

$\boxed{\text{II}}$ (3)　$0\leqq x\leqq 1$ で、$x=\sqrt{2\sin\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6})$ と表すことができる。

$dx=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2\sin\theta}}\,d\theta$　,

$\sqrt{4-x^4}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2|\cos\theta|$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ で $\cos\theta>0$ なので $\sqrt{4-x^4}=2\cos\theta$.

$$\therefore\ I_3=\int_0^{\pi/6}\frac{\sqrt{2\sin\theta}}{2\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{2\sin\theta}}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/6}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\pi}{12}$$

$\boxed{4}$

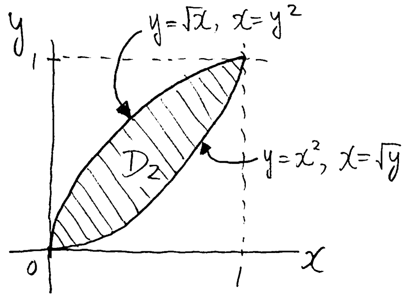
(1) 積分順序を逆にして求めてみると.

$$I_1 = \int_0^1 dy \int_1^2 dx \frac{1}{x+y} = \int_0^1 dy \left[\log|x+y| \right]_{x=1}^{x=2} = \int_0^1 dy \left\{ \log(y+2) - \log(y+1) \right\}$$

$$= \left[(y+2)\log(y+2) - (y+1)\log(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} = 3\log 3 - 2\log 2 - (2\log 2 - 1\log 1)$$

$$= 3\log 3 - 4\log 2 = \log\frac{27}{16} \quad (\text{答})$$

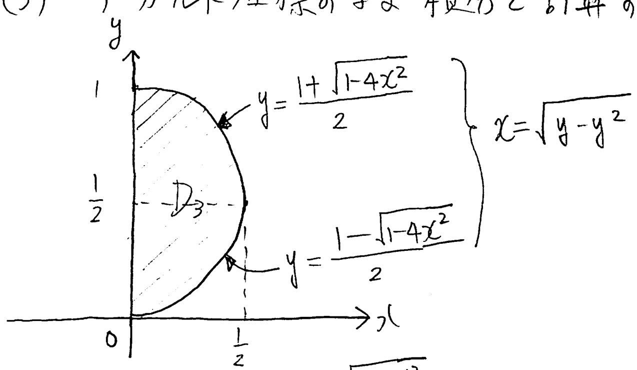
(2) 積分順序を逆にして求めるには、まず D_2 を図示し、



$$I_2 = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x^2 y\, dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3}x^3 y \right]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(y^2\sqrt{y} - y^7 \right) dy = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{56} \quad (\text{答})$$

(3) デカルト座標のまま積分を計算すると.



$$I_3 = \int_0^{1/2} dx \int_{\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}} x\, dy = \int_0^{1/2} x\sqrt{1-4x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{12}(1-4x^2)^{3/2} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{12} \quad (\text{答})$$

または

$$I_3 = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^2)\, dy = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} \quad (\text{答})$$