微分積分 II(b) 中間試験問題•答案用紙

2014 年 12 月 16 日 1 限実施

【全般的注意事項】解答に際しては, 最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また, 積分定数として断り書きなしに c, c', c'' 等の記号を用いてよい。なお, 教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが, 答案では arc$\cdots$ の形で書け。

【1】 $f(x)$ を任意の関数, $f'(x)$ をその導関数として,
10 点
$I = \displaystyle\int f'(x)\sin\bigl(f(x)\bigr)dx$ を求めよ。

【2】 $I = \displaystyle\int (\sin x - \cos x)\cdot\sin\bigl(\sin x + \cos x\bigr)dx$ を求めよ。
10 点

【3】 a, b を正の定数とするとき, $I = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+b}$ を求めよ。
10 点

【4】 $I = \displaystyle\int \arcsin(2x+3)\,dx$ を求めよ。 $(-2 \leq x \leq -1$ とする。$)$
10 点

学科	学籍番号								氏名	得点 [1]	[2]	[3]	[4]	本頁小計	全頁合計

【5】 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。
10 点

【6】 $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^3+1)}}$ が広義積分である理由を述べよ（2 つある）。次に I が有限の値を持つことを証明せよ（厳密な証明でなくても, 広義積分の収束・発散の判定の際に着目すべき事項に関して述べるだけでもよい。）
10 点

【7】 f と g を任意の関数とするとき, $h(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{2x} f(t)g(t^2)\,dt$ を求めよ。
10 点

【8】 極座標表示された曲線 $r = 1 + \cos\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ の長さ L を求めよ。全く分からない人は、この曲線の概形をできるだけ正確に描けば、5 点までは与えることがある。
10 点

学科	学籍番号								氏名	得点	[5]	[6]	[7]	[8]	本頁小計

【9】 10 点 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。(考え方: うまい置換積分の方法があり, 有理関数の積分に帰着させることができる。)

学科	学籍番号								氏名	得点 [9]

【10】 n を 1 以上の整数として $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ と定義する。$n \geq 2$ について I_n を I_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ。
10 点

(考え方: $I_{n-1} = \displaystyle\int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx$ で, 部分積分法により 1 を積分して x にし, $\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$ を微分して $-\frac{2(n-1)x}{(x^2+1)^n}$ にする。)

学科	学籍番号	氏名	得点 [10]

[1] $t=f(x)$ とおくと、$dt=f'(x)dx$.

$$\therefore\ I=\int \sin t\,dt=-\cos t+C=-\cos(f(x))+C \quad (\text{答})$$

但し、C は積分定数

[2] $t=\sin x+\cos x$ とおくと、$dt=(\cos x-\sin x)dx=-(\sin x-\cos x)dx$

$$\therefore\ I=-\int \sin t\,dt=\cos t+C=\cos(\sin x+\cos x)+C \quad (\text{答})$$

但し、C は積分定数

[3] $$I=\int\frac{dx}{ax^2+b}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\frac{a}{b}x^2+1}=\frac{1}{b}\int\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)^2+1}\,d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)+C \quad (\text{答})$$

但し、C は積分定数

[4] $t=2x+3$ とおくと、$dt=2dx$

$$I=\int\arcsin(2x+3)\,dx=\frac{1}{2}\int\arcsin t\,dt=\frac{1}{2}t\arcsin t-\frac{1}{2}\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}t\arcsin t+\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=\frac{2x+3}{2}\arcsin(2x+3)+\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x+3)^2}}_{=\sqrt{-x^2-3x-2}=\sqrt{-(x+1)(x+2)}}+C \quad (\text{答})$$

[別解] 最初に $t=2x+3$ という置換をしない場合は $\arcsin(2x+3)$ を微分した結果を再び積分するという余分な手間がかかる：

$$I=\int\arcsin(2x+3)dx=x\arcsin(2x+3)-\int\frac{2x}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}dx$$

$$=x\arcsin(2x+3)-\int\frac{2x+3}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$$

$$=x\arcsin(2x+3)-\frac{1}{4}\int\frac{\{(2x+3)^2\}'}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{d(2x+3)}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$$

$$=x\arcsin(2x+3)+\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x+3)^2}+\frac{3}{2}\arcsin(2x+3)+C$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)\arcsin(2x+3)+\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x+3)^2}}_{=\sqrt{-(x+1)(x+2)}}+C \quad (\text{答})$$

[5] $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ (答)

または広義積分の厳密な扱い方で書き表せば、

$$I = \lim_{\alpha \to -\infty} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha \to -\infty} \lim_{\beta \to \infty} \left[\arctan x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \lim_{\beta \to \infty} (\arctan \beta - \arctan \alpha) = \lim_{\beta \to \infty} \arctan \beta - \lim_{\alpha \to -\infty} \arctan \alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ (答)}$$

[6] 広義積分である, 即ち定積分の本来の定義にあてはまらない事項は

1、定積分の積分区間は有限でなければならないのに 積分区間の上端が無限になっている (即ち無限積分である)。

2、定積分の被積分関数は積分区間内で有限でなければならないのに、積分区間の下端 $x \to +0$ で無限大に発散する. (即ち特異積分である)。

I が有限であることは下記のようにして証明できる。

$x \geqq 0$ で $x^3+1 \geqq 1 > 0$, $x^3+1 \geqq x^3 \geqq 0$ なので

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x(x^3+1)}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{x(x^3+1)}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x \cdot x^3}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore\ 0 < I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x^3+1)}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^3+1)}}$$

$$\leqq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = (2-0) + (0+1) = 3$$

$\therefore\ 0 < I \leqq 3$ 　　　$\therefore$ I は有限である。

[簡易な答え方]

関数 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ は $0 < \alpha < 1$ のとき特異積分可能, $\alpha > 1$ のとき無限積分可能である.

被積分関数は $x \to +0$ で $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to +\infty$ で $\frac{1}{x^2}$ のように振る舞うので

どちらの端も積分可能である。

[7] $\varphi(t) = \int f(t)\, g(t^2)\, dt$ (不定積分) とおくと. $\varphi'(t) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f(t)\, g(t^2)$ である.

微分積分学の基本定理により

$$\int_x^{2x} f(t)\, g(t^2)\, dt = \Big[\varphi(t)\Big]_{t=x}^{t=2x} = \varphi(2x) - \varphi(x).$$

$$\therefore\ h(x) = \frac{d}{dx}\{\varphi(2x) - \varphi(x)\}$$

$$= \frac{d\varphi(2x)}{d(2x)} \cdot \frac{d(2x)}{dx} - \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (\because \text{合成関数の微分法})$$

$$= \varphi'(2x) \cdot 2 - \varphi'(x)$$

$$= 2f(2x)\, g\big((2x)^2\big) - f(x)\, g(x^2)$$

$$= 2f(2x)\, g(4x^2) - f(x)\, g(x^2) \quad (\text{答})$$

微分積分学の基本定理(および合成関数の微分法)が、答の導出中に現れない答案は、最終的な答がわずかでも間違っていたら0点とした。

[8] $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

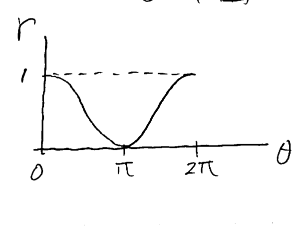
$$= 4\left[2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8 \quad (\text{答})$$

(別解) $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin\theta - \sin 2\theta)^2 + (\cos\theta + \cos 2\theta)^2}\, d\theta$$

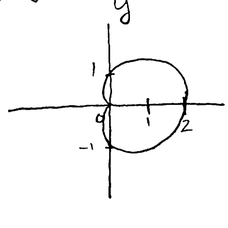
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = \cdots\cdots = 8 \quad (\text{答})$$

$\boxed{\text{注}}$ グラフの概形について：

「極座標表示された曲線」の概形とは x-y 平面での曲線の概形であり、r-θ 平面のそれを意味しない。



は0点。



のような曲線を描かねばならない。

[9] $t = x + \sqrt{x^2+1}$ とおくと.

$$t - x = \sqrt{x^2+1}$$

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1$$

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$dx = \frac{2t\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2}{4t^2}\,dt = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int\left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t^3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{4}\frac{1}{t^2} + C \qquad (C\text{は積分定数})$$

$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}}_{\parallel} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C \qquad (\text{答})$$

$$\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{\{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\}^2} = (\sqrt{x^2+1}-x)^2 \quad \text{とも書ける}$$

$\boxed{\text{別解1}}$

$t = \sqrt{x^2+1} - x$ とおくと. $x = \dfrac{1-t^2}{2t}$, $dx = -\dfrac{t^2+1}{2t^2}\,dt$

$$I = \cdots\cdots = -\frac{1}{2}\int\left(t + \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}\log|t| + C$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{x^2+1}-x)^2 - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+1}-x) + C \ (\text{答})$$

$\boxed{\text{別解2}}$ $x = \tan t \ \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと. $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{より} \cos t > 0\right)$$

$$I = \int \frac{1}{\tan t + \frac{1}{\cos t}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{(\sin t + 1)\cos t} = \int \frac{\cos t\,dt}{(1+\sin t)^2(1-\sin t)}$$

$s = \sin t \ \left(= \tan t\cos t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ とおくと

$$I = \int \frac{ds}{(1+s)^2(1-s)} = \int\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}\right\}ds$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{s+1}{s-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + C' = \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x} + C' \ (\text{答})$$

[10]

$$I_{n-1} = \int 1 \cdot (x^2+1)^{-n+1} dx \qquad (n \geqq 2)$$

$$= x(x^2+1)^{-n+1} - \int x \cdot (-n+1)(x^2+1)^{-n} \cdot 2x \, dx$$

$$= x(x^2+1)^{-n+1} + 2(n-1)\int x^2(x^2+1)^{-n} dx$$

$$= x(x^2+1)^{-n+1} + 2(n-1)\int \{(x^2+1)-1\}(x^2+1)^{-n} dx$$

$$= x(x^2+1)^{-n+1} + 2(n-1)\int (x^2+1)^{-n+1} dx - 2(n-1)\int (x^2+1)^{-n} dx$$

$$\therefore \quad I_{n-1} = x(x^2+1)^{-n+1} + 2(n-1) I_{n-1} - 2(n-1) I_n$$

$$2(n-1) I_n = (2n-3) I_{n-1} + x(x^2+1)^{-n+1}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} \qquad (n \geqq 2) \text{ 答}$$