微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全 3 頁中の第 1 頁目, ウラ使用可)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 保倉・山田・林・田嶋,　2014 年 2 月 4 日 1 限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問 (1)〜(3) に示した不定積分を求めよ。(10 点× 3 問=30 点)

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6}\, dx$　　(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$　　(3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 5}\, dx$

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 26 年 2 月 4 日	出題者: 保倉・山田 林・田嶋	学 科	学籍番号	氏 名	(第 1 頁目) 得 点

$\boxed{2}$ 下記の小問 (1),(2) に示した広義積分を, α の値で場合分けして計算せよ。もし積分が ∞ に発散するか、または、$-\infty$ に発散するか、存在しない場合はそのことを示せ。ただし, α は実数の定数で, $\alpha > 0$ とする。また、下記の小問 (3) に示した重積分を計算せよ。さらに、下記の小問 (4) に示した累次積分を計算せよ。(10 点× 4 問=40 点)

(1) $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$　(2) $J_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$　(3) $J_3 = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\ \ D: y = x,\ x = 1,\ x$ 軸に囲まれた領域.

(4) $J_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} (2x - e^{(y-1)^2})\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} (2x - e^{(y-1)^2})\,dy$（ヒント：積分の順序を入れ替えよ）

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 26 年 2 月 4 日	出題者: 保倉・山田 林・田嶋	学科	学籍番号	氏名	得点

$\boxed{3}$ 下記の小問 (1)〜(3) に示した積分またはその極限値を求めよ。（10 点× 3 問=30 点）

(1) $K_1 = \iint_{D_1} (x-y)^2\,dxdy, \quad D_1 = \{(x,y) \mid |x+2y| \leqq 3, |x-y| \leqq 6\}$

(2) $K_2 = \iint_{D_2} x^2\,dxdy, \quad D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$

(3) $K_3 = \lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D_R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq R^2,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y\}$

$\boxed{1}$

(1) $I_1 = \int \frac{2x^2-x-6}{x^2-x-6}dx$

$$x^2-x-6 \enclose{longdiv}{2x^2-x-6} \quad \text{商 } 2$$
$$\underline{2x^2-2x-12}$$
$$x+6$$

$\therefore I = \int \left(2 + \frac{x+6}{x^2-x-6}\right)dx$

$= 2x + \int \frac{x+6}{(x+2)(x-3)}dx$

$\frac{x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$ とおくと.

$x+6 = A\cdot(x-3) + B\cdot(x+2) = (A+B)x - 3A + 2B$

$\therefore \quad A+B=1, \quad -3A+2B=6 \qquad \therefore \ A=-\frac{4}{5}, \quad B=\frac{9}{5}$

$I = 2x + \int \frac{-\frac{4}{5}}{x+2}dx + \int \frac{\frac{9}{5}}{x-3}dx = 2x - \frac{4}{5}\log|x+2| + \frac{9}{5}\log|x-3| + c$ (答)

(cは積分定数)

(2) $I_2 = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}dx$

$t = \sin x$ とおくと. $I_2 = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$

$I_2 = -\frac{1}{2}\log|1-t| + \frac{1}{2}\log|1+t| + c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c$

(答)

[別解] $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ だから

$I_2 = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$

$I_2 = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c$ (答)

$= \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$ (答) とも表せる.

[解説] 恒等式 $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ を使うと. $\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ が示せる.

また. tanの加法定理により

$\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$ が示せる。

$\boxed{1}$

(3) $I_3=\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{x+3}{(x^2+4x+4)+1}dx = \int \frac{x+3}{(x+2)^2+1}dx$

$t=x+2$ とおくと. $I_3 = \int \frac{t+1}{t^2+1}dt = \int \frac{\frac{1}{2}(t^2)'}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt$

$I_3 = \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \arctan(t) + C$

$I_3 = \frac{1}{2}\log((x+2)^2+1) + \arctan(x+2) + C$

$I_3 = \frac{1}{2}\log(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C$ (答)

$\boxed{2}$

(1) $J_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$

$\alpha=1$ のとき $J_1 = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = [\log x]_0^1 = -\lim_{\beta\to+0}(\log\beta) = -(-\infty) = +\infty$

$\alpha\neq 1$ のとき $J_1 = \int_0^1 x^{-\alpha}dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\lim_{\beta\to+0}\beta^{1-\alpha}\right)$

$0<\alpha<1$ のとき $\gamma=1-\alpha>0$ として $J_1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\lim_{\beta\to+0}\beta^\gamma\right) = \frac{1}{1-\alpha}$

$\alpha>1$ のとき $\gamma=\alpha-1>0$ として $J_1 = \frac{-1}{\alpha-1}\left(1-\lim_{\beta\to+0}\frac{1}{\beta^\gamma}\right) = \frac{-1}{\alpha-1}(1-\infty)$
$= +\infty$

したがって $\begin{cases} 0<\alpha<1 \text{ のとき } & J_1 = \frac{1}{1-\alpha} \\ \alpha\geqq 1 \text{ のとき } & J_1 \to +\infty \end{cases}$ (答)

(J_1は存在しない)

(2) $J_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$

$\alpha=1$ のとき $J_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\log x]_1^\infty = \lim_{\beta\to+\infty}\log\beta = +\infty$

$\alpha\neq1$ のとき $J_2 = \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^\infty = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{\beta\to+\infty}\beta^{1-\alpha}-1\right)$

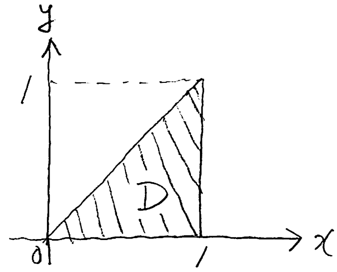
$0<\alpha<1$ のとき $\gamma=1-\alpha>0$ として $J_2 = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{\beta\to+\infty}\beta^\gamma - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha}(+\infty-1) = +\infty$

$\alpha>1$ のとき $\gamma=\alpha-1>0$ として $J_2 = \frac{-1}{\alpha-1}\left(\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\beta^\gamma}-1\right) = \frac{-1}{\alpha-1}(0-1) = \frac{1}{\alpha-1}$

したがって. $\begin{cases} 0<\alpha\leqq1 \text{ のとき } & J_2\to+\infty \\ \alpha>1 \text{ のとき } & J_2 = \frac{1}{\alpha-1} \end{cases}$ (答)

$\boxed{2}$

(3)



$$J_3 = \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy$$

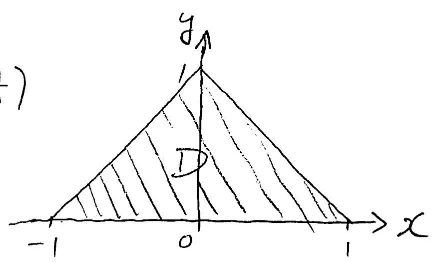
$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8} \quad \text{(答)}$$

[別解]

$$J_3 = \int_0^1 dy \int_y^1 xy\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=y}^{x=1} = \frac{1}{2}\int_0^1 (y - y^3)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \quad \text{(答)}$$

(4)



$$J_4 = \iint_D \left\{2x - e^{(y-1)^2}\right\} dx\,dy$$

$$J_4 = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} \left\{2x - e^{(y-1)^2}\right\} dx$$

$$= \int_0^1 dy \left[x^2 - x e^{(y-1)^2}\right]_{x=y-1}^{x=1-y}$$

$$= \int_0^1 \left\{(1-y)^2 - (1-y)e^{(y-1)^2} - (y-1)^2 + (y-1)e^{(y-1)^2}\right\} dy$$

$$= 2\int_0^1 (y-1)e^{(y-1)^2}\,dy = 2\left[\frac{1}{2}e^{(y-1)^2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1 - e \quad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$ (4) の $\boxed{\text{別解}}$ 外側の積分をx，内側の積分をyとしても 計算できる。

$$J_4^A = \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} \{2x - e^{(y-1)^2}\} dy,\ J_4^B = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \{2x - e^{(y-1)^2}\} dy \quad , J_4 = J_4^A + J_4^B$$

$F(y) = \int_0^y e^{(t-1)^2} dt$ と定義する。 $F(0) = 0$， $F'(y) = e^{(y-1)^2}$ が成立する。

$$J_4^A = \int_{-1}^{0} \left[2xy - F(y) \right]_{y=0}^{y=x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \{ 2x(x+1) - F(x+1) \} dx$$

- $\int_{-1}^{0} 2x(x+1) dx = \int_{-1}^{0} (2x^2 + 2x) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_{x=-1}^{x=0} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

- $\int_{-1}^{0} F(x+1) dx = \int_{-1}^{0} 1 \cdot F(x+1) dx = \left[x F(x+1) \right]_{x=-1}^{x=0} - \int_{-1}^{0} x F'(x+1) \cdot \underbrace{1}_{= \frac{d(x+1)}{dx}} dx$

$$= 0 \cdot F(1) - (-1) \underbrace{F(0)}_{=0} - \int_{-1}^{0} x e^{(x+1-1)^2} dx = -\int_{-1}^{0} x e^{x^2} dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{1}{2}(1 - e)$$

$$\therefore J_4^A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 - e)$$

$$J_4^B = \int_0^1 \left[2xy - F(y) \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \{ 2x(1-x) - F(1-x) \} dx$$

- $\int_0^1 2x(1-x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

- $\int_0^1 F(1-x) dx = \int_0^1 1 \cdot F(1-x) dx = \left[x F(1-x) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x F'(1-x) \cdot \underbrace{(-1)}_{= \frac{d(1-x)}{dx}} dx$

$$= 1 \cdot \underbrace{F(0)}_{=0} - 0 \cdot F(1) + \int_0^1 x e^{(1-x-1)^2} dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$\therefore J_4^B = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$\therefore J_4 = J_4^A + J_4^B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 - e) + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 - e) = 1 - e \ (\text{答})$$

$\boxed{3}$

(1) $D_1 = \{(x, y) \mid |x+2y| \leqq 3,\ |x-y| \leqq 6\}$

$u = x+2y$, $v = x-y$ とおくと.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot 1 = -3$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}.$$

$D_1' = \{(u, v) \mid -3 \leqq u \leqq 3,\ -6 \leqq v \leqq 6\}$ とすると.

$$K_1 = \iint_{D_1'} v^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du dv = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} du \int_{-6}^{6} v^2 dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \left[\frac{1}{3}v^3\right]_{v=-6}^{v=6} du = \frac{1}{3}\cdot 6 \cdot \frac{1}{3}\left(6^3 - (-6)^3\right) = 288 \text{ (答)}$$

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.

$$K_2 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r \cdot (r\cos\theta)^2$$

$$= \left\{\int_0^1 r^3 dr\right\}\left\{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\right\} = \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4} \text{ (答)}$$

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと.

$$K_3 = \lim_{R\to\infty} \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot r \cdot e^{-r^2}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R}$$

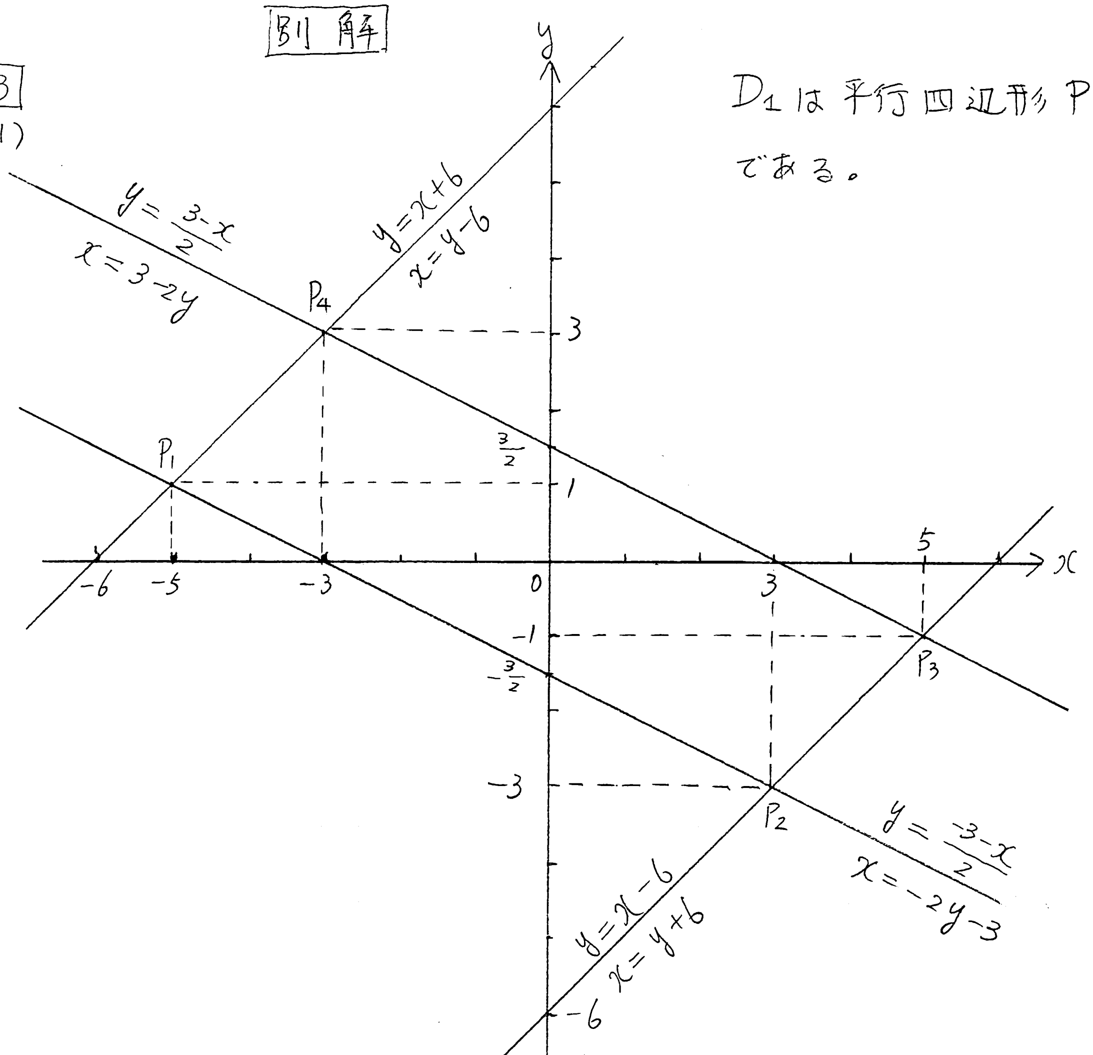
$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ (答)}$$

別解

3

(1)



D_1 は平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の内部領域である。

$$K_1=\int_{-5}^{-3}dx\int_{-\frac{3+x}{2}}^{x+6}(x-y)^2dy+\int_{-3}^{3}dx\int_{-\frac{3+x}{2}}^{\frac{3-x}{2}}(x-y)^2dy+\int_{3}^{5}dx\int_{x-6}^{\frac{3-x}{2}}(x-y)^2dy$$

$$=\frac{153}{2}+135+\frac{153}{2}$$

$$=288$$

あるいは

$$K_1=\int_{-3}^{-1}dy\int_{-2y-3}^{3-2y}(x-y)^2dx+\int_{-1}^{1}dx\int_{-2y-3}^{3-2y}(x-y)^2dx+\int_{1}^{3}dx\int_{y-6}^{3-2y}(x-y)^2dx$$

$$=108+72+108$$

$$=288$$