微分積分 II(d) 中間試験問題•答案用紙

【全般的注意事項】解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また、積分定数として断り書きなしに c、c'、c'' 等の記号を用いてよい。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが、答案では arc··· の形で書け。

【1】 $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ を求めよ.
10 点

【2】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3}$ を求めよ.
10 点

【3】 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{2+3x}}$ を求めよ.
10 点

【4】 $I = \displaystyle\int \arctan x\,dx$ を求めよ.
10 点

学科	学籍番号								氏名	得点	[1]	[2]	[3]	[4]	本頁小計	全頁合計

【5】 10 点 $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{1} f(3t)\,dt$ を求めよ。

【7】 10 点 $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ を求めよ。

【6】 10 点 $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{x+1} e^{-t^2}\,dt$ を求めよ。

【8】 10 点 $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$ を求めよ。

学科		学籍番号									氏名		得点	[5]	[6]	[7]	[8]	本頁小計

【9】 10 点 $I = \displaystyle\int \frac{6}{x(x+1)(x+3)}\, dx$ を求めよ。

学科		学籍番号									氏名		得点	[9]

【10】 n をゼロ以上の整数として $I_n = \int \sin^n x\, dx$ と定義する。$n \geq 2$ について I_n を I_{n-2} を用いて表す漸化式を求めよ。
10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	[10]

[1] $I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$

$t=1+x^4$ とおくと　$dt=4x^3dx$,　$x^3dx=\frac{1}{4}dt$

$\therefore I=\int \frac{\frac{1}{4}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}t^{1/2}+C = \frac{1}{2}\sqrt{t}+C = \frac{\sqrt{1+x^4}}{2}+C$ (答)

[2] $I=\int \frac{dx}{x^2+3}$

$I=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

$t=\frac{x}{\sqrt{3}}$ とおくと.　$dx=\sqrt{3}\,dt$

$\therefore I=\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan t+C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C$ (答)

[3] $I=\int \frac{dx}{1+\sqrt{2+3x}}$

$t=\sqrt{2+3x}$ とおくと.　$t^2=2+3x$,　$2t\,dt=3\,dx$, $dx=\frac{2}{3}t\,dt$.

$\therefore I=\int \frac{\frac{2}{3}t\,dt}{1+t} = \frac{2}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{2}{3}t-\frac{2}{3}\log|1+t|+C$

$=\frac{2}{3}\sqrt{2+3x}-\frac{2}{3}\log\left(1+\sqrt{2+3x}\right)+C$ (答)

[4] $I=\int \arctan x\,dx$

$I=\int 1\cdot\arctan x\,dx$

$=\int (x)'\arctan x\,dx$

$=x\arctan x-\int x\,(\arctan x)'dx$

$=x\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)'dx}{1+x^2}$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$ (答)

[5] $g(x) = \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_{2x}^{1} f(3t)\,dt$

$F(t) = \displaystyle\int f(3t)\,dt$ とおく。 $F'(t) = \dfrac{dF(t)}{dt} = f(3t)$ が成り立つ.

$u = 2x$ とおく。 $\dfrac{du}{dx} = 2$ である. $F'(u) = \dfrac{dF(u)}{du} = f(3u)$ が成り立つ

$g(x) = \dfrac{d}{dx} \Big[F(t) \Big]_{t=u}^{t=1} = \dfrac{d}{dx} \{F(1) - F(u)\} = 0 - \dfrac{dF(u)}{dx}$

$g(x) = -\dfrac{dF(u)}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = -F'(u) \cdot 2 = -2f(3u) = -2f(6x)$ (答)

[6] $g(x) = \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_{x}^{x+1} e^{-t^2}\,dt$

$F(t) = \displaystyle\int e^{-t^2}\,dt$ とおく. $F'(t) = \dfrac{dF(t)}{dt} = e^{-t^2}$ が成り立つ.

$g(x) = \dfrac{d}{dx} \Big[F(t) \Big]_{t=x}^{t=x+1} = \dfrac{d}{dx} \{ F(x+1) - F(x) \}$

$= \dfrac{dF(x+1)}{d(x+1)} \dfrac{d(x+1)}{dx} - \dfrac{dF(x)}{dx}$

$= F'(x+1) \cdot 1 - F'(x)$

$= e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2}$ (答)

$= e^{-x^2} (e^{-2x-1} - 1)$ (答)

[7] $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

$t = \cos x$ とおくと. $dt = -\sin x\,dx$

$x = 0$ で $t = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$ で $t = 0$

$I = \displaystyle\int_1^0 \dfrac{-dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 t^{-1/2}\,dt$

$= \Big[2t^{1/2} \Big]_{t=0}^{t=1}$

$= 2$ (答)

[8] $I = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

$$I = \int_0^\infty x^2 \,(-e^{-x})'\,dx = \left[x^2\cdot(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (x^2)'(-e^{-x})\,dx$$

$$= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$$

$$= \quad 0 - 0 \quad + \quad 2\int_0^\infty x\,(-e^{-x})'\,dx$$

$$= 2\left[x\cdot(-e^{-x})\right]_0^\infty - 2\int_0^\infty (x)'(-e^{-x})\,dx$$

$$= -2\left[x\,e^{-x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= \quad 0 - 0 \quad + \quad 2\left[-e^{-x}\right]_0^\infty$$

$$= 2\cdot\left(0 - (-1)\right)$$

$$= 2 \quad \text{(答)}$$

但し下記の極限値を使用した

- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\,e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{(x)}}{\underset{\to\infty}{e^{x}}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ロピタルの定理}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\underset{\to\infty}{e^{x}}} = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{-x}} = 2\cdot 0 = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

[9] $F(x) = \displaystyle\int \frac{6}{x(x+1)(x+3)}\,dx$

$$\frac{6}{x(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \quad \text{とおくと}$$

$$6 = A(x+1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+1)$$

$$6 = (A+B+C)x^2 + (4A+3B+C)x + 3A$$

$$\therefore \begin{cases} A+B+C=0 & \cdots\text{①} \\ 4A+3B+C=0 & \cdots\text{②} \\ 3A \qquad\quad =6, & \therefore\ A=2 \cdots\text{③} \end{cases}$$

②−①より $3A+2B=0$, $B=-\frac{3}{2}A=-3$.

①より $C=-A-B=-2+3=1$

$$\therefore F(x) = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= 2\log|x| - 3\log|x+1| + \log|x+3| + C \quad \text{(答)} = \log\left|\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}\right| + C \quad \text{(答)}$$

[10] $I_n = \int \sin^n x \, dx \quad (n \geqq 0)$

$n \geqq 2$のとき

$$I_n = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx$$

$$= \int (-\cos x)' \cdot \sin^{n-1} x \, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x - \int (-\cos x)(\sin^{n-1} x)' dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x \, (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$n I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (答)$$