微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全 4 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・小野田・林,　2013 年 2 月 5 日 1 限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問 (1)〜(3) に示した不定積分を求めよ。(10 点× 3 問=30 点)

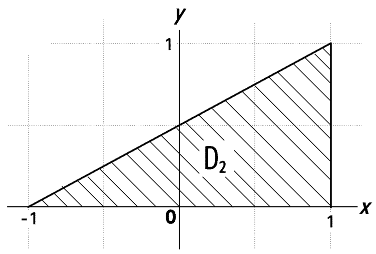
(1) $I = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx$　　(2) $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$　　(3) $I = \displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 25 年 2 月 5 日	出題者: 田嶋・保倉 小野田・林	学科	学籍番号								氏名	得点 /30

$\boxed{2}$ 下記の小問 (1),(2) に示した広義積分を求めよ。もし積分が発散する（＝可能でない、存在しない）場合はそのことを証明せよ。(10 点× 2 問=20 点)

(1) $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,dx$　　(2) $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

$\boxed{3}$ 小問 (1)〜(4) に示した 2 重積分の値を求めよ。（10 点× 3 問=30 点）



(1) $I_1 = \displaystyle\int_{D_1} \sin(x+2y)\,dxdy, \quad D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_{D_2} (x-y)^2\,dxdy$, ただし D_2 は右図で斜線を施した領域とする。

(3) $I_3 = \displaystyle\int_{D_3} e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D_3 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \le y \le \sqrt{1-x^2}\ \}$

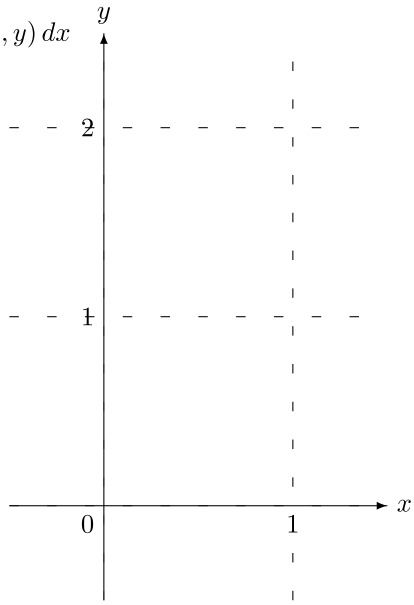
科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 25 年 2 月 5 日	出題者: 田嶋・保倉 小野田・林	学科	学籍番号	氏名	得点 /30

微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全 4 頁中の第 4 頁目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・小野田・林,　2013 年 2 月 5 日 1 限実施

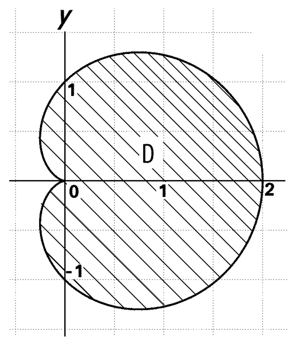
$\boxed{4}$ 下記の等式が任意の $f(x,y)$ に対して成立するような領域 D を図示し、また, $\boxed{?}$ に適切な数または数式を入れて右辺を完成させよ。(10 点× 1 問=10 点)

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy = \int_0^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dx$$



答:　(右辺)= $\displaystyle\int_0^{\boxed{\quad}} dy \int_{\boxed{\quad}}^{\boxed{\quad}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{\quad}}^{\boxed{\quad}} dy \int_{\boxed{\quad}}^{\boxed{\quad}} f(x,y)\,dx$

$\boxed{5}$ 極座標表示された曲線 $r = 1 + \cos\theta$,　$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の長さを L、囲む図形（右図で斜線を施した領域 D）の面積を S とする。L と S のうち、どちらか一方、好きな方を求めよ。(10 点× 1 問=10 点、両方求めても得点は 10 点）



科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 25 年 2 月 5 日	出題者: 田嶋・保倉 小野田・林	学 科	学籍番号	氏 名	(第 4 頁目) 得 点　/20

1

(1) $I=\int \frac{x}{(1+x^2)^3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}\frac{1}{(1+x^2)^2}+C$

$= -\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$ (答)

(2) $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. $t=\sqrt{x+1}$ とおくと. $t^2=x+1$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$.

$I=\int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)t} = 2\int\frac{dt}{t^2-1} = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\log|t-1|-\log|t+1|+C = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$ (答)

(3) $I=\int e^x\sin x\,dx = \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x(\sin x)'dx$.

$= e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx$

$= e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)'dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$

$\therefore\ I = e^x\sin x - e^x\cos x - I + C \quad \therefore\ 2I = e^x(\sin x-\cos x)+C$

$\therefore\ I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C'$ (答)

2

(1) $F(x)=\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ とおくと. $\overbrace{I=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(1)}^{[1,\infty)\text{で被積分関数は連続なので,}}$.

$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$ とおくと. $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\frac{1}{2}$.

$\therefore\ F(x)=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\log|x|-\log|x+1|+\frac{1}{2}\log|x+2|+C$.

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right|+C$

$\therefore\ F(1)=\frac{1}{2}\log\frac{1\cdot 3}{2^2}=\frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$

$F(x)=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\frac{2}{x}}{(1+\frac{1}{x})^2}\right|+C \xrightarrow{(x\to+\infty)} \frac{1}{2}\log\frac{1}{1}=0$

$\therefore\ I = 0-\frac{1}{2}\log\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$ (答)

$\boxed{2}$

(2) $x=0$ 付近で $\dfrac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} \sim \dfrac{1}{x}$ なので I は対数発散する.

このことを厳密に証明するには例えば以下のように論じれば良い

$0 \leqq x \leqq 1$ で $1 \leqq x^2+x+1 \leqq 3$, $1 \leqq x^2+1 \leqq 2$, $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{x^2+1} \leqq 1$

$$\therefore \quad \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} \geqq \frac{1}{x\cdot 2}$$

$0<\varepsilon \leqq 1$ として

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx \geqq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\log\varepsilon \xrightarrow{(\varepsilon\to+0)} -\frac{1}{2}\cdot(-\infty) = \infty$$

$\therefore \quad I = \lim_{\varepsilon\to+0} I_\varepsilon = \infty$ であるから I は発散する.

$\boxed{\text{別解}}$

$\dfrac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと. $A=1$, $B=0$, $C=1$

$$\therefore \quad F(x) = \int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \log|x| + \arctan x + C$$

ここまでで6点くらいやる.

$$I = F(1) - \lim_{\varepsilon\to+0}F(\varepsilon) = \frac{\pi}{4} - \lim_{\varepsilon\to+0}\log|\varepsilon| = +\infty$$

$\therefore$ I は発散する

$\boxed{3}$

(1)
$$I_1 = \int_0^{\pi/4}dx\int_0^{\pi/2}dy\,\sin(x+2y) = \int_0^{\pi/4}dx\left[-\frac{1}{2}\cos(x+2y)\right]_{y=0}^{y=\pi/2}$$

$$= \int_0^{\pi/4}dx\left(-\frac{1}{2}\cos(x+\pi)+\frac{1}{2}\cos x\right) = \int_0^{\pi/4}\cos x\,dx$$

$$= \Big[\sin x\Big]_{x=0}^{x=\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{答})$$

(2)
$$I_2 = \int_{-1}^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}(x+1)}dy\,(x-y)^2 = \int_{-1}^1 dx\left[\frac{1}{3}(y-x)^3\right]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}(x+1)}$$

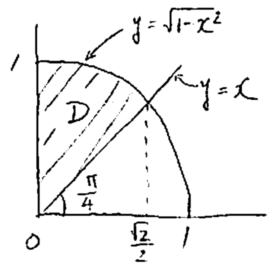
$$= \int_{-1}^1 dx\,\frac{1}{3}\left[\left\{\frac{1}{2}(1-x)\right\}^3 - (-x)^3\right] = \frac{1}{3}\int_{-1}^1\left\{\frac{1}{8}(1-x)^3 + x^3\right\}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{32}(1-x)^4 + \frac{1}{4}x^4\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{32}(-16) + \frac{1}{4}\cdot 0\right) = \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

$\boxed{\text{別解}}$ $I = \displaystyle\int_0^1 dy\int_{2y-1}^1 dx\,(x-y)^2 = \frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^3dy = -\frac{1}{6}\Big[(1-y)^4\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6}$ (答)

3

(3)



左図より、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと

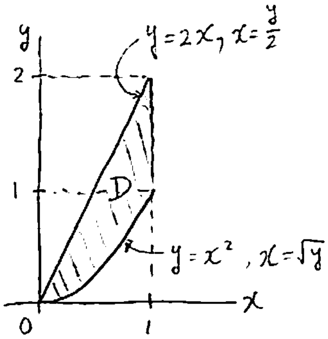
$$J_3 = \int_0^1 dr \cdot r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \; e^{-r^2}$$

$$= \left(\int_0^1 r e^{-r^2} dr\right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=1} \cdot \left[\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi(1-e^{-1})}{8}$$ (答)

4



$$\iint_D f\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^{1} f(x,y)\,dx$$ (答)

5

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8$$ (答)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi + 0 + \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{3}{2}\pi$$ (答)