微分積分 II(a) 中間試験問題•答案用紙

【全般的注意事項】解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また、積分定数として断り書きなしに c、c'、c'' 等の記号を用いてよい。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが、答案では arc$\cdots$ の形で書け。

【1】$I = \displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$ を求めよ.
10 点

【2】$I = \displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$ を求めよ.
10 点

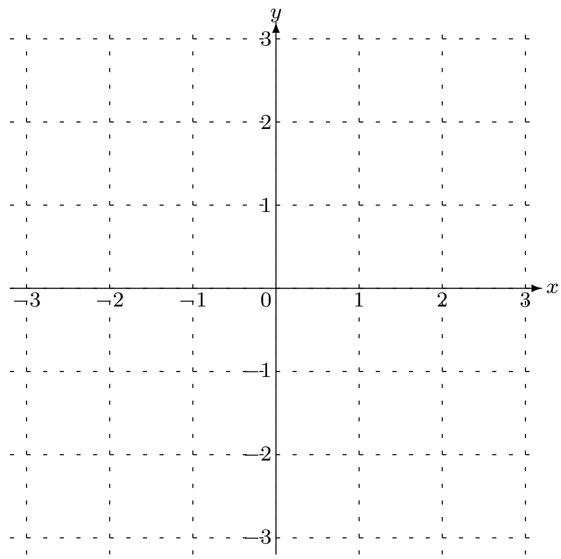
【3】不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ を求めよ.
10 点

【4】$I = \displaystyle\int \arcsin x\,dx$ を求めよ.
10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	本頁小計	全頁合計

【5】 10 点 $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2+5}^{x^3+6} f(t+4)\,dt$ を求めよ。

【7】 10 点 極座標表示された曲線 $r = 1 + \cos 4\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の概形を描け。



【6】 10 点 $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ とする。このとき、$G(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{2x^4+3}$ を F を使って表せ。

【8】 10 点 下式のようにパラメータ表示された曲線の長さ L を求めよ。

$$x = \sqrt{3}t^2, \quad y = t - t^3 \quad (1 \leq t \leq 2)$$

学科	学籍番号	氏名	得点 [5] [6] [7] [8] 本頁小計

【9】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}$ を求めよ。
10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	[9]

【10】n をゼロ以上の整数として、$I_n = \int x^n \sin x\,dx,\ J_n = \int x^n \cos x\,dx$ と定義する。このとき以下の小問に答えよ。
10 点

(1) $n \geq 1$ のとき、 I_n を J_{n-1} を使って表す漸化式と、J_n を I_{n-1} を使って表す漸化式を作れ。

(2) 前小問で作った漸化式を利用して、I_5 を求めよ。

学科		学籍番号									氏名		得点	[10]

解答・解説

【1】

$$I=\int x^2 e^{3x}dx=\int x^2\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'dx \overset{\text{部分積分法}}{=} x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int (x^2)'\frac{1}{3}e^{3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'dx$$

$$\overset{\text{部分積分法}}{=}\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}\int x'\cdot\frac{1}{3}e^{3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{9}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+c$$

$$=\frac{1}{27}(9x^2-6x+2)e^{3x}+c \quad (答)$$

【2】 $I=\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx$． $t=x^2$ とおくと． $dt=2xdx$．

$x^3dx=x^2\cdot xdx=t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}tdt$． $0\leqq x<\infty$ は $0\leqq t<\infty$ に対応．

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty t(-e^{-t})'dt=\frac{1}{2}\Big[t\cdot(-e^{-t})\Big]_0^\infty-\frac{1}{2}\int_0^\infty t'\cdot(-e^{-t})dt$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[te^{-t}\Big]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt=-\frac{1}{2}\Big[te^{-t}+e^{-t}\Big]_0^\infty$$

ここで． $e^0=1$， $\lim_{t\to\infty}e^{-t}=0$， $\lim_{t\to\infty}te^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}\underset{\text{ロピタルの定理}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0$ を使うと．

$$I=-\frac{1}{2}(0+0-0\cdot1-1)=\frac{1}{2} \quad (答)$$

【3】 $\dfrac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおける．

$$2x^3+2x^2+x+1=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2$$

$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B$$

$\therefore$ $A+C=2$， $B+D=2$， $A=1$， $B=1$ $\quad$ $\therefore$ $C=2-A=1$, $D=2-B=1$

$$\therefore I=\int\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2+1}\right\}dx$$

$$=\log|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\arctan x+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\{x^2(x^2+1)\}-\frac{1}{x}+\arctan x+c \quad (答)$$

$$\left[\because \int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)}=\frac{1}{2}\log|x^2+1|+c.\right]$$

【4】 $I = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = \int x' \cdot \arcsin x \, dx$

部分積分法

$$\underline{\underline{=}} \; x \arcsin x - \int x (\arcsin x)' dx$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{(1-x^2)'\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{1/2} + c$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad (答)$$

【5】 $F(t) = \int f(t+4)\,dt$ とおくと. $F'(t) = f(t+4)$.

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_{x^2+5}^{x^3+6} f(t+4)\,dt = \frac{d}{dx} \left\{ F(x^3+6) - F(x^2+5) \right\}$$

$$= F'(x^3+6) \cdot \frac{d}{dx}(x^3+6) - F'(x^2+5) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+5)$$

$$= 3x^2 f(x^3+6+4) - 2x \cdot f(x^2+5+4)$$

$$= 3x^2 f(x^3+10) - 2x f(x^2+9) \quad (答).$$

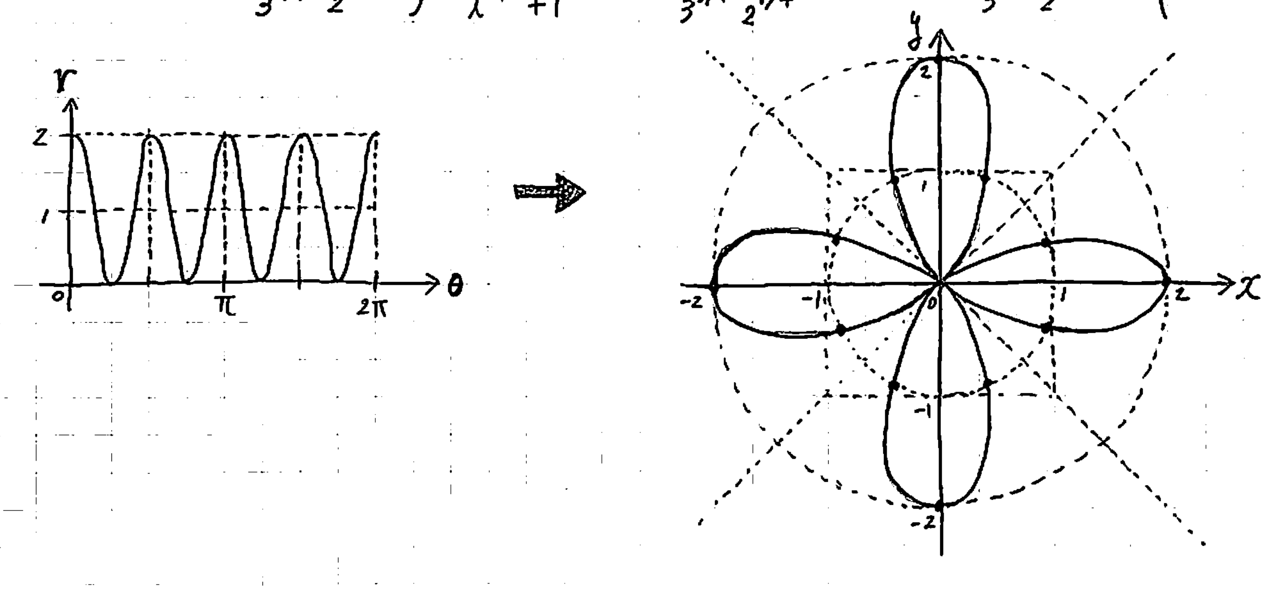
【6】 $G(x) = \int \frac{dx}{2x^4+3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{2}{3}x^4 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} x \right\}^4 + 1}$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/4} \int \frac{d\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} x\right\}}{\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} x \right\}^4 + 1}$$

$\therefore$ $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} x$ とおくと.

$$G(x) = \frac{1}{3^{3/4}\, 2^{1/4}} \int \frac{dt}{t^4+1} = \frac{1}{3^{3/4}\, 2^{1/4}} F(t) = \frac{1}{3^{3/4}\, 2^{1/4}} F\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} x \right) \quad (答)$$

【7】



[8]

$$L = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^2 \sqrt{(2\sqrt{3}t)^2 + (1-3t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{12t^2 + 1 - 6t^2 + 9t^4}\, dt = \int_1^2 \sqrt{9t^4 + 6t^2 + 1}\, dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{(3t^2+1)^2}\, dt = \int_1^2 |3t^2+1|\, dt = \int_1^2 (3t^2+1)\, dt$$

$$= \left[t^3 + t \right]_1^2 = 8 + 2 - 1 - 1 = 8 \quad (答)$$

[9] $t = \sqrt{x^2+2x} - x$ とおく. （$t = \sqrt{x^2+2x} + x$ とおいてもよい）

$t + x = \sqrt{x^2+2x}$, $t^2 + 2tx + x^2 = x^2 + 2x$, $t^2 = 2(1-t)x$

$$\therefore\ x = \frac{t^2}{2(1-t)}.$$

$$\bullet\ \sqrt{x^2+2x} = t + x = t + \frac{t^2}{2(1-t)} = \frac{2t - 2t^2 + t^2}{2(1-t)} = \frac{2t - t^2}{2(1-t)} = \frac{t(2-t)}{2(1-t)}$$

$$\bullet\ \frac{dx}{dt} = \frac{2t\cdot(1-t) - t^2\cdot(-1)}{2(1-t)^2} = \frac{2t - 2t^2 + t^2}{2(1-t)^2} = \frac{t(2-t)}{2(1-t)^2}$$

$$I = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} \cdot \frac{dx}{dt}\, dt = \int \frac{\cancel{2(1-t)}}{t^2} \cdot \frac{2(1-t)}{\cancel{t(2-t)}} \cdot \frac{\cancel{t(2-t)}}{\cancel{2(1-t)^2}}\, dt = 2\int \frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{2}{t} + C = \frac{2}{x - \sqrt{x^2+2x}} + C \quad (答)$$

$$= \frac{2(x + \sqrt{x^2+2x})}{(x - \sqrt{x^2+2x})(x + \sqrt{x^2+2x})} + C = \frac{2(x + \sqrt{x^2+2x})}{\underbrace{x^2 - (x^2+2x)}_{=-2x}} + C = -1 - \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + C' \quad (C' = C - 1) \quad (答)$$

[10]

(1) $I_n = \int x^n \sin x\, dx = \int x^n (-\cos x)'\, dx$

部分積分法

$$\overset{部分積分法}{=} x^n \cdot (-\cos x) - \int (x^n)' \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx$$

$$\therefore\ I_n = -x^n \cos x + n J_{n-1} \quad (答)$$

$J_n = \int x^n \cos x\, dx = \int x^n (\sin x)'\, dx$

部分積分法

$$= x^n \sin x - \int (x^n)' \cdot \sin x\, dx$$

$$= x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx$$

$$\therefore\ J_n = x^n \sin x - n I_{n-1} \quad (答)$$

[10] (2)

$$J_0 = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$I_1 = -x\cos x + J_0 = \sin x - x\cos x + C'$$

$$J_2 = x^2\sin x - 2I_1 = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C''$$

$$I_3 = -x^3\cos x + 3J_2 = (3x^2-6)\sin x + (-x^3+6x)\cos x + C'''$$

$$J_4 = x^4\sin x - 4I_3 = (x^4-12x^2+24)\sin x + (4x^3-24x)\cos x + C''''$$

$$I_5 = -x^5\cos x + 5J_4 = 5(x^4-12x^2+24)\sin x + (-x^5+20x^3-120x)\cos x + C'''''$$

(答)

検算してみると.

$$I_5' = (20x^3-120x)\sin x + (5x^4-60x^2+120)\cos x$$
$$+ (-5x^4+60x^2-120)\cos x - (-x^5+20x^3-120x)\sin x$$

$$= x^5\sin x \quad (\text{o.k.})$$

別解・補足説明

[2] の別解① 部分積分法によっても求めることはできる。(薦めません)

$$I = \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}dx = \int_0^\infty x^2\cdot xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\,(e^{-x^2})'dx$$

部分積分法

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\left[x^2e^{-x^2}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^\infty \cancel{2}x\cdot e^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^\infty = 0-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

[2] の別解② 別の置換方法によっても求まることはある。(薦めません)

$t = e^{-x^2}$ とおく. $dt = -2xe^{-x^2}dx = -2xt\,dx$, $dx = -\dfrac{1}{2xt}dt$

$x=0$ で $t=1$, $x\to\infty$ で $t\to+0$.

$$\therefore\ I = \int_1^0 x^3t\left(-\frac{1}{2xt}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1(-\log t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[t\log t - t\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

[2] の答案で頻出した誤りは $\int e^{-x^2}dx \overset{\text{誤}}{=} -\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ という式変形でした。

これが誤っていることは右辺を微分すれば明らかになります:

$$\left(-\frac{1}{2x}e^{-x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{2x}\right)'e^{-x^2} - \frac{1}{2x}(e^{-x^2})' = \frac{1}{2x^2}e^{-x^2} - \frac{1}{2x}(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right) \neq e^{-x^2}$$

[4]の別解

$t = \arcsin x$ とおくと、$\sin t = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$. $dx = \cos t\, dt$

$\therefore\ I = \int \arcsin x\, dx = \int t \cos t\, dt \overset{\text{部分積分法}}{=} t \sin t - \int \underbrace{t'}_{1} \sin t\, dt$

$= t \sin t + \cos t + C = x \arcsin x + \cos t + C$.

$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geqq 0$ なので $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$.

$\therefore\ I = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

(採点基準) $\sqrt{1-x^2}$ を $\cos(\arcsin x)$ と書き表しても間違いではないが、
簡単化できるものを複雑なまま放置するのは良くないので、2点減点した.