「万能積分法」

微分は必ずできる（既知の関数を組み合せて導関数が表せる）が、不定積分は求まらないことが多いということは、皆さんも高校時代にすでに気づかれていたことでしょう。しかし、ある種のパターンにあてはまる関数に限れば、不定積分を確実に求められる手順は知られています。そのような手順をこの講義では仮に「万能積分法」と呼ぶことにします。実際は限定的な状況下での「万能」に過ぎませんが、問題毎に個別に特殊な工夫が必要になるタイプの積分問題の解法とは質的に異なる水準の包括性があると思うので、そう呼びたいと思います。

本項目の学習目標の第一はそれらの方法の原理を理解することです。第二は方法を簡単な場合に適用して計算を完遂できることです。方法を暗記することは求めません（しかしこの 2 つの目標に向かってしっかりと勉強すれば、多くのことが自然と記憶に残ることでしょう）。

なお、万能積分法の解説としては、下記の書物の簡明な記述が最良でしょう。

「岩波数学公式 I 微分積分・平面曲線」、森口繁一、一松信、宇田川銈久著、岩波書店 (1987 年).

以下に記した数式では積分定数を省略します。

【 a. 有理関数の積分 】

変数 x の多項式 (polynomial) とは、x^m (m は非負整数）の形の項の一次結合、即ち、下記の形の数式である。

$$(\text{多項式}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^l \qquad (a_0, \cdots, a_n \text{ は定数}, l \text{ は非負整数})$$

係数が実数である多項式は、下記の 2 種類の形の項の積に因数分解できることが分かっている。

(i) $(x-r)^m$ の形の項（r は実定数、m は正の整数)

(ii) $(x^2+px+q)^n$ の形の項（p, q は $p^2 < 4q$ を満たす実定数、n は正の整数)

[補足]　これは「代数学の基本定理」という重要な定理からの自明な帰結である。ただし、多項式の次数 l が $l \geq 5$ の場合は、r, p, q 等の定数は四則や冪乗根の記号を使って陽に表せるとは限らない。その場合は何らかの代数方程式の解として陰的に定義することになる。

有理関数とは下記の有理式で表される関数である。

$$(\text{有理式}) = \frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$$

有理式の分母の多項式を上記の (1),(2) の形の項の積として因数分解したときに現れる (1) の形の項の r と m, (2) の形の項の p と q と n を使って、有理式は下記の (i)〜(iii) の 3 種類の項の和として表すこと（部分分数分解）が可能である。

(i) $\dfrac{a}{(x-r)^i}$ の形の項（a は定数、i は m 以下の正の整数)

(ii) $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^j}$ の形の項（a, b は定数、j は n 以下の正の整数)

(iii) ax^k の形の項（a は定数、k は分子の多項式の次数から分母の多項式の次数を引いた値以下の自然数)

[補足] $f(x)$ が m 次, $g(x)$ が n 次, $r(x)$ が $m+n-1$ 次以下の多項式であるとき, $f(z)=0$ と $g(z)=0$ とを同時に満たす複素数 z が存在しなければ、下式を満たす $m-1$ 次以下の多項式 $p(x)$ と $n-1$ 次以下の多項式 $q(x)$ とが存在することが示せる。

$$\frac{r(x)}{f(x)g(x)} = \frac{p(x)}{f(x)} + \frac{q(x)}{g(x)}$$

上記の (i) や (ii) の項は、上式の $p(x)/f(x)$ や $q(x)/g(x)$ で、$f(x)$ や $g(x)$ が $(x-r)^m$ や $(x^2+px+q)^n$ である場合に、それらを、積分しやすい形の項の和としてさらに分解した結果として現れるのである。

分解後の各項は、下記の通り容易に不定積分を求めることができる。

(i) $$\int \frac{a}{(x-r)^i}dx = \begin{cases} -\dfrac{a}{i-1}\dfrac{1}{(x-r)^{i-1}} & (i \neq 1) \\ a\log|x-r| & (i=1) \end{cases}$$

(ii) $s=\frac{1}{2}p,\ t=\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$ とおくと、$x^2+px+q=(x+s)^2+t^2$ と表せる。$j=1$ の場合は、

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{(x+s)^2+t^2}\,dx &= \int \frac{a(x+s)}{(x+s)^2+t^2}\,dx + \int \frac{b-as}{(x+s)^2+t^2}\,dx \\ &= \frac{a}{2}\int \frac{2(x+s)}{(x+s)^2+t^2}\,d(x+s) + \frac{b-as}{t}\int \frac{1}{(\frac{x+s}{t})^2+1}\,d\left(\tfrac{x+s}{t}\right) \\ &= \frac{a}{2}\log\left\{(x+s)^2+t^2\right\} + \frac{b-as}{t}\arctan\frac{x+s}{t}\end{aligned}$$

$j \geq 2$ の場合は下式により求めればよい。（計算が煩瑣なので本講義の試験には出題されないであろう。）

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{\{(x+s)^2+t^2\}^j}\,dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2(x+s)}{\{(x+s)^2+t^2\}^j}\,d(x+s) + \frac{b-as}{t^{2j-1}}\int \frac{1}{\{(\frac{x+s}{t})^2+1\}^j}\,d\left(\tfrac{x+s}{t}\right) \\ &= -\frac{a}{2(j-1)}\frac{1}{\{(x+s)^2+t^2\}^{j-1}} + \frac{b-as}{t^{2j-1}}I_j\left(\frac{x+s}{t}\right)\end{aligned}$$

ただし、$I_j(u) = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^j}$ は部分積分法により導ける下記の漸化式で求める。

$$I_1(u) = \arctan u, \qquad I_j(u) = \frac{u}{2(j-1)(u^2+1)^{j-1}} + \frac{2j-3}{2j-2}I_{j-1}(u) \quad (j \geq 2)$$

以下は $j=2$〜5 についての具体的な計算過程と結果である。

$$I_2 = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan u$$

$$I_3 = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2 = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan u = \frac{u(3u^2+5)}{8(u^2+1)^2} + \frac{3}{8}\arctan u$$

$$I_4 = \frac{u}{6(u^2+1)^3} + \frac{5}{6}I_3 = \cdots = \frac{u(15u^4+40u^2+33)}{48(u^2+1)^3} + \frac{5}{16}\arctan u$$

$$I_5 = \frac{u}{8(u^2+1)^4} + \frac{7}{8}I_4 = \cdots = \frac{u(105u^6+385u^4+511u^2+279)}{384(u^2+1)^4} + \frac{35}{128}\arctan u$$

(iii) $$\int ax^k\,dx = \frac{a}{k+1}x^{k+1}$$

【 b. 無理関数の積分 】

$R(u,v)$ を 2 変数 $u,\ v$ の有理関数とする。即ち、

$$R(u,v)=\frac{(u,\ v\ \text{の多項式})}{(u,\ v\ \text{の多項式})}$$

であり、「$u,\ v$ の多項式」とは、$u^m v^n$ ($n,\ m$ は非負整数) の形の項の一次結合、即ち下記の形の数式である。

$$R(u,v)=\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{l'}a_{mn}u^m v^m \quad (a_{mn}\ \text{は定数。}l,\ l'\ \text{は非負整数。})$$

このとき、

$$I=\int R\big(x,f(x)\big)\,dx$$

は、変数変換 $x=x(t)$ による置換積分により

$$I=\int R\Big(x(t),f\big(x(t)\big)\Big)\frac{dx(t)}{dt}dt$$

になる。ここで、$x(t),\ f\big(x(t)\big),\ \frac{dx(t)}{dt}$ のいずれもが t の有理関数になるような変数変換を見つけることができれば、この積分は有理関数の積分となるので、必ず不定積分を求めることができる。下記の (1)〜(3) はそのような例である。(なお、一見して全く別個の方法に見える (1) と (2) を統一的に導く方法が冒頭に掲げた岩波数学公式集に説明されている。) (4) はそれとは別種の置換法である。

(1) $f(x)=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$（ただし a,b,c,d は $ad-bc\neq 0$ を満たす定数）のときは、$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおくとよい。

このとき $x=\dfrac{dt^n-b}{-ct^m+a},\quad f\big(x(t)\big)=t,\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}$ となる。

特別な場合として、

$f(x)=\sqrt[n]{x}$ のときは、$t=\sqrt[n]{x}$ とおくとよい。

$f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ ($a,\ b$ は定数で、$a\neq 0$) のときは、$t=\sqrt[n]{ax+b}$ とおくとよい。

(2) $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a,\ b,\ c$ は定数、$a>0$) のときは、$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$ とおくとよい。

$t=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x$ とおいた場合は、

$x=\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},\quad f\big(x(t)\big)=t+\sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(-\sqrt{a}t^2+bt-\sqrt{a}c)}{(b-2\sqrt{a}t)^2}$ となる。

なお、$f(x)=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ の形に因数分解されるときは $f(x)=\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)(x-\beta)^2}{(x-\beta)}}=\sqrt{a}\,\big|x-\beta\big|\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$ なので前述の (1) を適用して、$t=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$ とおいても良い。$t=\sqrt{\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}}$ とおいても同じく良い。

(3) $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a,\ b,\ c$ は定数、$a<0$) のときは、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は 2 実解を持つ。(さもなければ、ax^2+bx+c は至るところで負の値をとるので、$f(x)$ の定義域が空集合になる。) この 2 実解を $\alpha,\ \beta$ ($\alpha<\beta$) とすると、$f(x)=\sqrt{-a}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ と書ける。このときは、$f(x)$ の定義域 $\alpha\le x\le\beta$ で $\beta-x\ge 0$ なので $f(x)=\sqrt{-a}(\beta-x)\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ と表せることから、前述の (1) を適用して、$t=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ とおけば良いと分かる。$t=\sqrt{\dfrac{\beta-x}{x-\alpha}}$ とおいても同様に良い。

(4) 後述の項目 c で説明する三角関数の有理式の積分に帰着させることもできる。そうすれば前述の (1)〜(3) の方法より簡単に求まる場合がある。例えば、a を正の定数として、

$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ のときは、$x=a\sin t$ $(-\frac{1}{2}\pi\le t\le\frac{1}{2}\pi)$ とおけばよい。
このとき、$f(x)=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt$ となるので I は t の三角関数の有理式の積分になる。
[説明] 根号の中身が負でないことより、$f(x)$ の定義域は $-a\le x\le a$ である。上述の t の範囲で $a\sin t$ はこの定義域を漏れなくカバーしている。また、この範囲の t に対して $\cos t\ge 0$ であるから $\sqrt{a^2-x^2}=a|\cos t|=a\cos t$ となる。

$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$ のときは、$x=a\tan t$ $(-\frac{1}{2}\pi<t<\frac{1}{2}\pi)$ とおけばよい。
このとき、$f(x)=a\sec t,\quad dx=a\sec^2 t dt$ となるので I は t の三角関数の有理式の積分になる。
[説明] $f(x)$ の定義域 $-\infty<x<\infty$ は、$-\frac{1}{2}\pi<t<\frac{1}{2}\pi$ で $-\infty<a\tan t<\infty$ であるからカバーできている。また、この範囲の t に対して $\sec t\ge 1$ であるから $\sqrt{a^2+x^2}=a|\sec t|=a\sec t$ となる。

$f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ のときは、$x=a\sec t$ $(0\le t<\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi<t\le\pi)$ とおけばよい。
このとき、$f(x)=a\,|\tan t|,\quad dx=a\sin t\sec^2 t\,dt$ となるので I は t の三角関数の有理式の積分になる。
[説明] $f(x)$ の定義域は根号の中身がゼロ以上となる $-\infty<x\le -a,\ a\le x<\infty$ である。$0\le t<\frac{1}{2}\pi$ では $a\le a\sec t<\infty$, $\frac{1}{2}\pi<t\le\pi$ では $-\infty<a\sec t\le -a$ なので、上記の変換はこの定義域をカバーできている。$f(x)=\sqrt{x^2-a^2}=a|\tan t|$ は、$0\le t<\frac{1}{2}\pi$ では $a\tan t$, $\frac{1}{2}\pi<t\le\pi$ では $-a\tan t$ となるので、絶対値記号を外してはならない。

[補足] 三角関数（三角比）には高校で習った 3 種類以外に $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta},\quad \mathrm{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta},\quad \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ も使われる。夫々, セカント, コセカント, コタンジェントと読む。

[補足] 本配布資料では説明を割愛するが、双曲線関数という三角関数に類似した初等関数による置換でも有理化できる。三角関数と双曲線関数とで、有理化の手間は大して違わないが、結果として得られた (三角関数ないし双曲線関数の) 有理式の不定積分を求める際の手間は大きく違うことがあるので、複数の有理化法を知っておくことは有益である。

【 c. 三角関数の有理式の積分 】

$R(u)$ で 1 変数 u の有理関数を、$R(v,w)$ で 2 変数 v,w の有理関数を表すものとする。

(1) $\sin^m x\cos^n x$（$m,\ n$ は整数、$m+n$ は偶数）の形の項の有理式の不定積分、例えば $I=\displaystyle\int R(\tan x)\,dx$ や $I=\displaystyle\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)\,dx$ などを求めるには、$t=\tan x$ とおけば良い。
このとき、　$\tan x=t,\quad \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\quad \sin^2 x=\cos^2 x\tan^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$　となり、
$\sin x\cos x=\tan x\cos^2 x=\dfrac{t}{1+t^2}$ 等も成り立つので、I は t の有理式の積分になることがわかる。

(2) $I=\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ を求めるには、$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおけば良い。
このとき、　$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$　となるので、I は t の有理式の積分になる。

[補足] (2) は (1) の対象にも使えるが、(1) で求まる積分を (2) で求めようとすると、何倍も長い計算が必要になることが多い。

【 積分技法を勉強することの必要性 】

卒業研究などで不定積分を求める必要が生じたとき、計算が複雑そうなら、数学公式集で調べたり、数式処理ソフトウエアで求めたりすることが多いだろうと思います。私も研究の水準をできるだけ上げるため数式処理ソフトウエアは積極的に使うべきであると思っています。しかし、公式集やソフトウエアをまともに使えるためには、自分の手で計算をして積分を求める経験が是非必要です。求めたい積分が公式集に載録されていそうかどうか、載っている箇所を目次で特定できるか、ソフトウエアで求めることができそうか、等々は自分の手で積分を計算できない人には決して分かりません。さらに、ソフトウエアは見当違いの答を返すことが珍しくないので、結果についてある程度の予測がつかない人が使うのはとても危ういことです。

なお、微分積分 II の内容だけでなく、複素関数論（「応用数学 IV」等の講義で習う）の知識がないと理解できない積分手法も多いので、複素関数論もしっかり勉強して下さい。

もうひとつ、公式集には間違いが付き物なので、公式集の積分公式を利用する際には微分するなどして自分で確認することを勧めます。