不定積分を求める基本的手法の練習

【 基本的な関数の不定積分 】(微分公式を積分公式として見る．c は積分定数である.)

1. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+c \qquad (a \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|+c$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x+c$
4. $\displaystyle\int \sin\,x\,dx = -\cos\,x+c$
5. $\displaystyle\int \cos\,x\,dx = \sin\,x+c$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+c$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x+c$

【 積分公式として覚えておくと役に立つ式 】

8. $\displaystyle\int \log\,x\,dx = x\log\,x - x + c$ 　(部分積分法で容易に求まる.)
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$ 　($\tan$ の微分公式を積分公式として使う．積分を実行したいなら, 定石は置換 $t=\tan\,x$.)

【 置換積分法 】 integration by substitution

$$\boxed{x = x(t) \text{ として } \int f(x)dx = \int f\left(x\left(t\right)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt \quad \cdots\cdots\cdots \quad (※)}$$

★ 不定積分計算の心構え：結果を微分して被積分関数に一致することを確かめるべきである.

下記の問題 (1)〜(4) は置換方法が自明な場合である.
即ち、上記の公式 (※) の右辺の形をした積分が与えられたとき, それを左辺の形に直して答を求める問題である.

(1) $\displaystyle F(x) = \int xe^{x^2}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(x^2)' = \frac{1}{2}x$ に着目する.

(2) $\displaystyle F(x) = \int \sin^3 x\cos x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(\sin\,x)' = \cos\,x$ に着目する.

(3) $\displaystyle F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(1+x^2)' = 2x$ に着目する.

(4) $\displaystyle F(x) = \int \frac{(\log\,x)^2}{x}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$ に着目する.

下記の問題 (5)〜(8) は一次変換で既知の積分に帰着できる場合である.

(5) $\displaystyle F(x) = \int \sin 2x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $\displaystyle\int \sin t\,dt = -\cos t + c$ に帰着させる.

(6) $F(x) = \displaystyle\int \frac{2}{3x^2+4}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c$ に帰着させる.

(7) $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx \ \ (a>0)$ 　$\cdots$ 積分公式 $\displaystyle\int \sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+1} + \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right\} + c$ に帰着させる.

(8) $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$ 　$\cdots\cdots$ 積分公式 $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + c$ に帰着させる.

下記の問題 (9)〜(12) は指示通りに置換積分を遂行する能力があるかどうかを見る問題である.

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ を積分変数の置換 $x = \sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$ により示せ.

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$ を積分変数の置換 $x = \cos t$ $(0 \le t \le \pi)$ により示せ.

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ を積分変数の置換 $x = \tan t$ $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ により示せ.

(12) $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ を積分変数の置換 $t = \sqrt{x}$ により求めよ.

下記ではうまい置換方法を自分で見つけることが肝要である.

(13) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

式変形により被積分関数が容易に積分できる形になる場合もある. 下記はその一例である.

(14) $F(x) = \displaystyle\int \tan^3 x\,dx$

【 部分積分法 】 integration by parts

積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$ より $f'g = (fg)' - fg'$. 両辺を x で積分すると

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

部分積分法を活用して下記の不定積分を求めよ.

(15) $F(x) = \displaystyle\int xe^{2x}dx$ 　$\cdots\cdots$ x を微分して 1 に, e^{2x} を積分して $\frac{1}{2}e^{2x}$ にする.

(16) $F(x) = \displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ x^2 は 2 回微分すると 1 になる. $\cos x$ は何回でも積分できる.

(17) $F(x) = \displaystyle\int x^3 \log x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ x^3 は積分し, $\log x$ は微分する.

(18) $F(x) = \displaystyle\int \arcsin x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $1 \cdot \arcsin x$ と見て, 1 は積分し, 逆三角関数は微分する.

(19) $F(x) = \displaystyle\int \arctan x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ $1 \cdot \arctan x$ と見て, 1 は積分し, 逆三角関数は微分する.

(20) $F(x) = \displaystyle\int e^{2x} \cos 3x\,dx$ 　$\cdots\cdots$ 部分積分を 2 回行うと右辺に $F(x)$ が現れ, 未知数 $F(x)$ に関する一次方程式を得る.

「万能積分法」

微分は必ずできる（既知の関数を組み合せて導関数が表せる）が、不定積分は求まらないことが多いということは、皆さんも高校時代にすでに気づかれていたことでしょう。しかし、ある種のパターンにあてはまる関数に限れば、不定積分を確実に求められる手順は知られています。そのような手順をこの講義では仮に「万能積分法」と呼ぶことにします。実際は限定的な状況下での「万能」に過ぎませんが、問題毎に個別に特殊な工夫が必要になるタイプの積分問題の解法とは質的に異なる水準の包括性があると思うので、そう呼びたいと思います。

本項目の学習目標の第一はそれらの方法の原理を理解することです。第二は方法を簡単な場合に適用して計算を完遂できることです。方法を暗記することは求めません（しかしこの 2 つの目標に向かってしっかりと勉強すれば、多くのことが自然と記憶に残ることでしょう）。

なお、万能積分法の解説としては、下記の書物の簡明な記述が最良でしょう。

「岩波数学公式 I 微分積分・平面曲線」、森口繁一、一松信、宇田川銈久著、岩波書店 (1987 年).

以下に記した数式では積分定数を省略します。

【 a. 有理関数の積分 】

変数 x の多項式 (polynomial) とは、x^m (m は非負整数）の形の項の一次結合、即ち、下記の形の数式である。

$$(\text{多項式}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^l \qquad (a_0, \cdots, a_n \text{ は定数}, l \text{ は非負整数})$$

係数が実数である多項式は、下記の 2 種類の形の項の積に因数分解できることが分かっている。

(i) $(x-r)^m$ の形の項（r は実定数、m は正の整数)

(ii) $(x^2+px+q)^n$ の形の項（p, q は $p^2 < 4q$ を満たす実定数、n は正の整数)

[補足] これは「代数学の基本定理」という重要な定理からの自明な帰結である。ただし、多項式の次数 l が $l \geq 5$ の場合は、r, p, q 等の定数は四則や冪乗根の記号を使って陽に表せるとは限らない。その場合は何らかの代数方程式の解として陰的に定義することになる。

有理関数とは下記の有理式で表される関数である。

$$(\text{有理式}) = \frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$$

有理式の分母の多項式を上記の (1),(2) の形の項の積として因数分解したときに現れる (1) の形の項の r と m, (2) の形の項の p と q と n を使って、有理式は下記の (i)〜(iii) の 3 種類の項の和として表すこと（部分分数分解）が可能である。

(i) $\dfrac{a}{(x-r)^i}$ の形の項（a は定数、i は m 以下の正の整数)

(ii) $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^j}$ の形の項（a, b は定数、j は n 以下の正の整数)

(iii) ax^k の形の項（a は定数、k は分子の多項式の次数から分母の多項式の次数を引いた値以下の自然数)

[補足] $f(x)$ が m 次, $g(x)$ が n 次, $r(x)$ が $m+n-1$ 次以下の多項式であるとき, $f(z)=0$ と $g(z)=0$ とを同時に満たす複素数 z が存在しなければ、下式を満たす $m-1$ 次以下の多項式 $p(x)$ と $n-1$ 次以下の多項式 $q(x)$ とが存在することが示せる。

$$\frac{r(x)}{f(x)g(x)} = \frac{p(x)}{f(x)} + \frac{q(x)}{g(x)}$$

上記の (i) や (ii) の項は、上式の $p(x)/f(x)$ や $q(x)/g(x)$ で、$f(x)$ や $g(x)$ が $(x-r)^m$ や $(x^2+px+q)^n$ である場合に、それらを、積分しやすい形の項の和としてさらに分解した結果として現れるのである。

分解後の各項は、下記の通り容易に不定積分を求めることができる。

(i) $$\int \frac{a}{(x-r)^i} dx = \begin{cases} -\dfrac{a}{i-1}\dfrac{1}{(x-r)^{i-1}} & (i \neq 1) \\ a\log|x-r| & (i=1) \end{cases}$$

(ii) $s=\frac{1}{2}p,\ t=\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$ とおくと、$x^2+px+q=(x+s)^2+t^2$ と表せる。$j=1$ の場合は、

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{(x+s)^2+t^2}\,dx &= \int \frac{a(x+s)}{(x+s)^2+t^2}\,dx + \int \frac{b-as}{(x+s)^2+t^2}\,dx \\ &= \frac{a}{2}\int \frac{2(x+s)}{(x+s)^2+t^2}\,d(x+s) + \frac{b-as}{t}\int \frac{1}{(\frac{x+s}{t})^2+1}\,d\left(\tfrac{x+s}{t}\right) \\ &= \frac{a}{2}\log\left\{(x+s)^2+t^2\right\} + \frac{b-as}{t}\arctan\frac{x+s}{t}\end{aligned}$$

$j \geq 2$ の場合は下式により求めればよい。（計算が煩瑣なので本講義の試験には出題されないであろう。）

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{\left\{(x+s)^2+t^2\right\}^j}\,dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2(x+s)}{\left\{(x+s)^2+t^2\right\}^j}\,d(x+s) + \frac{b-as}{t^{2j-1}}\int \frac{1}{\left\{(\frac{x+s}{t})^2+1\right\}^j}\,d\left(\tfrac{x+s}{t}\right) \\ &= -\frac{a}{2(j-1)}\frac{1}{\left\{(x+s)^2+t^2\right\}^{j-1}} + \frac{b-as}{t^{2j-1}}I_j\left(\frac{x+s}{t}\right)\end{aligned}$$

だたし、$I_j(u)=\displaystyle\int\frac{du}{(u^2+1)^j}$ は部分積分法により導ける下記の漸化式で求める。

$$I_1(u)=\arctan u, \qquad I_j(u)=\frac{u}{2(j-1)(u^2+1)^{j-1}}+\frac{2j-3}{2j-2}I_{j-1}(u) \quad (j \geq 2)$$

以下は $j=2$〜5 についての具体的な計算過程と結果である。

$$I_2 = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan u$$

$$I_3 = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2 = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan u = \frac{u(3u^2+5)}{8(u^2+1)^2} + \frac{3}{8}\arctan u$$

$$I_4 = \frac{u}{6(u^2+1)^3} + \frac{5}{6}I_3 = \cdots = \frac{u(15u^4+40u^2+33)}{48(u^2+1)^3} + \frac{5}{16}\arctan u$$

$$I_5 = \frac{u}{8(u^2+1)^4} + \frac{7}{8}I_4 = \cdots = \frac{u(105u^6+385u^4+511u^2+279)}{384(u^2+1)^4} + \frac{35}{128}\arctan u$$

(iii) $$\int ax^k\,dx = \frac{a}{k+1}x^{k+1}$$

【 b. 無理関数の積分 】

$R(u,v)$ を 2 変数 u, v の有理関数とする。即ち、

$$R(u,v) = \frac{(u,\ v\ \text{の多項式})}{(u,\ v\ \text{の多項式})}$$

であり、「u, v の多項式」とは、$u^m v^n$ (n, m は非負整数) の形の項の一次結合、即ち下記の形の数式である。

$$R(u,v) = \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{l'} a_{mn} u^m v^m \quad (a_{mn}\ \text{は定数。}l,\ l'\ \text{は非負整数。})$$

このとき、

$$I = \int R\big(x, f(x)\big)\,dx$$

は、変数変換 $x = x(t)$ による置換積分により

$$I = \int R\Big(x(t), f\big(x(t)\big)\Big)\frac{dx(t)}{dt}dt$$

になる。ここで、$x(t)$, $f\big(x(t)\big)$, $\frac{dx(t)}{dt}$ のいずれもが t の有理関数になるような変数変換を見つけることができれば、この積分は有理関数の積分となるので、必ず不定積分を求めることができる。下記の (1)〜(3) はそのような例である。(なお、一見して全く別個の方法に見える (1) と (2) を統一的に導く方法が冒頭に掲げた岩波数学公式集に説明されている。) (4) はそれとは別種の置換法である。

(1) $f(x) = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$（ただし a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす定数）のときは、$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおくとよい。

このとき $x = \dfrac{dt^n - b}{-ct^m + a}$, $f\big(x(t)\big) = t$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n - a)^2}$ となる。

特別な場合として、

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ のときは、$t = \sqrt[n]{x}$ とおくとよい。

$f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$ (a, b は定数で、$a \neq 0$) のときは、$t = \sqrt[n]{ax+b}$ とおくとよい。

(2) $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ (a, b, c は定数、$a > 0$) のときは、$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$ とおくとよい。

$t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$ とおいた場合は、

$x = \dfrac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$, $f\big(x(t)\big) = t + \sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2(-\sqrt{a}t^2 + bt - \sqrt{a}c)}{(b-2\sqrt{a}t)^2}$ となる。

なお、$f(x) = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ の形に因数分解されるときは $f(x) = \sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)(x-\beta)^2}{(x-\beta)}} = \sqrt{a}\,\big|x-\beta\big|\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$ なので前述の (1) を適用して、$t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$ とおいても良い。$t = \sqrt{\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}}$ とおいても同じく良い。

(3) $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ (a, b, c は定数、$a < 0$) のときは、2 次方程式 $ax^2+bx+c = 0$ は 2 実解を持つ。（さもなければ、ax^2+bx+c は至るところで負の値をとるので、$f(x)$ の定義域が空集合になる。）この 2 実解を α, β（$\alpha < \beta$）とすると、$f(x) = \sqrt{-a}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ と書ける。このときは、$f(x)$ の定義域 $\alpha \leq x \leq \beta$ で $\beta - x \geq 0$ なので $f(x) = \sqrt{-a}(\beta-x)\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ と表せることから、前述の (1) を適用して、$t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ とおけば良いと分かる。$t = \sqrt{\dfrac{\beta-x}{x-\alpha}}$ とおいても同様に良い。

(4) 後述の項目 c で説明する三角関数の有理式の積分に帰着させることもできる。そうすれば前述の (1)〜(3) の方法より簡単に求まる場合がある。例えば、a を正の定数として、

$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ のときは、$x=a\sin t\ (-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi)$ とおけばよい。
このとき、$f(x)=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt$ となるので I は t の三角関数の有理式の積分になる。
[説明] 根号の中身が負でないことより、$f(x)$ の定義域は $-a\leq x\leq a$ である。上述の t の範囲で $a\sin t$ はこの定義域を漏れなくカバーしている。また、この範囲の t に対して $\cos t \geq 0$ であるから $\sqrt{a^2-x^2}=a|\cos t|=a\cos t$ となる。

$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$ のときは、$x=a\tan t\ (-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi)$ とおけばよい。
このとき、$f(x)=a\sec t,\quad dx=a\sec^2 t dt$ となるので I は t の三角関数の有理式の積分になる。
[説明] $f(x)$ の定義域 $-\infty<x<\infty$ は、$-\frac{1}{2}\pi<t<\frac{1}{2}\pi$ で $-\infty<a\tan t<\infty$ であるからカバーできている。また、この範囲の t に対して $\sec t\geq 1$ であるから $\sqrt{a^2+x^2}=a|\sec t|=a\sec t$ となる。

$f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ のときは、$x=a\sec t\ (0\leq t<\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi<t\leq\pi)$ とおけばよい。
このとき、$f(x)=a\,|\tan t|,\quad dx=a\sin t\sec^2 t\,dt$ となるので I は t の三角関数の有理式の積分になる。
[説明] $f(x)$ の定義域は根号の中身がゼロ以上となる $-\infty<x\leq -a,\ a\leq x<\infty$ である。$0\leq t<\frac{1}{2}\pi$ では $a\leq a\sec t<\infty$, $\frac{1}{2}\pi<t\leq\pi$ では $-\infty<a\sec t\leq -a$ なので、上記の変換はこの定義域をカバーできている。$f(x)=\sqrt{x^2-a^2}=a|\tan t|$ は、$0\leq t<\frac{1}{2}\pi$ では $a\tan t$, $\frac{1}{2}\pi<t\leq\pi$ では $-a\tan t$ となるので、絶対値記号を外してはならない。

[補足] 三角関数（三角比）には高校で習った 3 種類以外に $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta},\quad \mathrm{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta},\quad \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ も使われる。夫々, セカント, コセカント, コタンジェントと読む。

[補足] 本配布資料では説明を割愛するが、双曲線関数という三角関数に類似した初等関数による置換でも有理化できる。三角関数と双曲線関数とで、有理化の手間は大して違わないが、結果として得られた (三角関数ないし双曲線関数の) 有理式の不定積分を求める際の手間は大きく違うことがあるので、複数の有理化法を知っておくことは有益である。

【 c. 三角関数の有理式の積分 】

$R(u)$ で 1 変数 u の有理関数を、$R(v,w)$ で 2 変数 v,w の有理関数を表すものとする。

(1) $\sin^m x\cos^n x$（$m,\ n$ は整数、$m+n$ は偶数）の形の項の有理式の不定積分、例えば $I=\displaystyle\int R(\tan x)\,dx$ や $I=\displaystyle\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)\,dx$ などを求めるには、$t=\tan x$ とおけば良い。
このとき、 $\tan\ x=t,\quad \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\quad \sin^2 x=\cos^2 x\tan^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$ となり、
$\sin x\cos x=\tan x\cos^2 x=\dfrac{t}{1+t^2}$ 等も成り立つので、I は t の有理式の積分になることがわかる。

(2) $I=\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ を求めるには、$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおけば良い。
このとき、 $\sin\ x=\dfrac{2t}{1+t^2},\quad \cos\ x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ となるので、I は t の有理式の積分になる。

[補足] (2) は (1) の対象にも使えるが、(1) で求まる積分を (2) で求めようとすると、何倍も長い計算が必要になることが多い。

【 積分技法を勉強することの必要性 】

卒業研究などで不定積分を求める必要が生じたとき、計算が複雑そうなら、数学公式集で調べたり、数式処理ソフトウエアで求めたりすることが多いだろうと思います。私も研究の水準をできるだけ上げるため数式処理ソフトウエアは積極的に使うべきであると思っています。しかし、公式集やソフトウエアをまともに使えるためには、自分の手で計算をして積分を求める経験が是非必要です。求めたい積分が公式集に載録されていそうかどうか、載っている箇所を目次で特定できるか、ソフトウエアで求めることができそうか、等々は自分の手で積分を計算できない人には決して分かりません。さらに、ソフトウエアは見当違いの答を返すことが珍しくないので、結果についてある程度の予測がつかない人が使うのはとても危ういことです。

なお、微分積分 II の内容だけでなく、複素関数論（「応用数学 IV」等の講義で習う）の知識がないと理解できない積分手法も多いので、複素関数論もしっかり勉強して下さい。

もうひとつ、公式集には間違いが付き物なので、公式集の積分公式を利用する際には微分するなどして自分で確認することを勧めます。

有理関数の不定積分の計算例

【問題】　不定積分　$F(x) = \displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$　を求めよ.

【解答】

n を自然数とし, c_i $(i=1,\cdots,n)$ を実数の定数として, 変数 x の n 次の多項式とは, $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ の形の数式のことである. そして, 有理関数（有理式）とは, $\dfrac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数（数式）のことである. 任意の有理関数の不定積分は, 以下の計算例で述べるような手順に従えば, 必ず求めることができる.

[補足]「多項式」は polynomial の訳語だが,「整式」と訳す流儀もある.

なお,「整式」という訳語は「有理数は整数を整数で割ったものである」という言い回しに類似した「有理式は整式を整式で割ったものである」という言い回しができる観点からは整合性が良い命名だが,「係数が整数の場合が整式だ」という誤解をされるのが心配である. 一方,「多項式」という訳語にも「項を沢山含む数式を多項式と言うのだろう. 三角関数だろうが平方根だろうがどんな形の関数の項を含んでいても, 複数の項の和は全て多項式と呼んで良いはすだ」という乱暴な誤解をされる心配がある.

$\boxed{\text{ステップ 1}}$

被積分関数の分子の多項式の次数は 4, 分母の多項式の次数は 3 である. このように,（分子の次数）≧（分母の次数）のときは, まず, 多項式の割り算を行って, 被積分関数を （分子の次数）＜（分母の次数）に変える.

そのためには, 下記のように, 多項式の「積み算」の形で求めれば, 計算間違いが少ないだろう.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x & -1 & & & \\ \cline{2-6}
x^3+x^2+x+1 & x^4 & & +x^2 & & +1 \\
 & x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & & -x & +1 \\
 & & -x^3 & -x^2 & -x & -1 \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & & +2
\end{array} \tag{1}
$$

この積み算の計算結果から, 下記の等式を得る.

$$
\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1} = x - 1 + \frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1} \tag{2}
$$

[補足] もし分母や分子が因数分解した形で与えられたときは, それぞれを展開してから, 積み算をせよ.

[補足] 多項式の積み算を, 下記のように, x^n を略して数字だけを書くことで省力化する流儀を好む人もあるだろう.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & & 1 & -1 \\ \cline{2-6}
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \cline{2-6}
 & & -1 & 0 & -1 & 1 \\
 & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \cline{3-6}
 & & & 1 & 0 & 2
\end{array} \tag{3}
$$

これは, 桁上がりのない積み算と捉えることができる. 小学生の習う 10 進数の積み算では, 1 つの桁に入る数字は 0〜9 の整数に制限されており, 計算中に或る桁の数字が 10 以上や負になれば上位の桁の数字を修正することで 0〜9 の範囲に納めるという規則が計算手続きの面倒な部分だったが, 多項式の積み算では, 1 つの桁に入れてよい数字は $-\infty$ から $+\infty$ までの全実数なので, ある桁での計算が他の桁に影響を及ぼすという面倒なことは起こらないのである.

ステップ 2

一般に, 実係数の（即ち, 係数が実数の）多項式は, 何個かの（実係数の）1 次式, および, 何個かの判別式が負の（実係数の）2 次式の積の形に因数分解できるという定理が成り立つ. ステップ 2 では分母の多項式をこの形になるまで完全に因数分解する.

変数 x に或る値 a を代入すると多項式の値がゼロになるなら, その多項式は $(x-a)$ で割り切れる（$(x-a)$ を因子に持つとも言う）. 本問題の場合は, 分母の多項式 x^3+x^2+x+1 に $x=-1$ を代入すると,

$$x^3+x^2+x+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0 \tag{4}$$

なので, 分母の多項式は $(x+1)$ を因子に持つ. 実際, 下式の通りである.

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1) \tag{5}$$

[補足] 式 (5) の計算は, 途中で計算間違いをすると, 割り切れるはずのものが（ほとんどの場合は）割り切れなくなって計算間違いをしたと分かるので, 手間をかけて（確実性のより高い）多項式の積み算をする必要性は小さいだろう.

x^2+1 は判別式の値 $(=-4)$ が負なので (言い換えると, $x^2+1\geq 1>0$ ゆえに $x^2+1=0$ を満たす実数が存在しないので), 実係数の範囲ではこれ以上因数分解できないから, 式 (5) でこのステップの目的を達したことになる.

ステップ 3

被積分関数の有理式の部分を部分分数分解（教科書での呼称は部分分数 展開）する.

本問題の場合は, 別紙配布資料で述べたように, A, B, C を定数として,

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{6}$$

の形に部分分数分解という名の式変形ができる. 両辺に $(x+1)(x^2+1)$ を掛けると,

$$\begin{aligned} x^2+2 &= A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1) && (7)\\ &= (A+B)x^2+(B+C)x+A+C && (8) \end{aligned}$$

と成るので,

$$\begin{aligned} A+B &= 1 && (9)\\ B+C &= 0 && (10)\\ A+C &= 2 && (11) \end{aligned}$$

を満たす A, B, C の値の組を見つけることができれば, その形に変形できることを確かめたことになる. (9)−(10)+(11) より, $2A=3$, $\therefore\ A=\frac{3}{2}$. これを (9) に代入して $B=1-A=-\frac{1}{2}$. (10) に代入して $C=2-A=\frac{1}{2}$. このようにして下記の部分分数分解結果を得ることができた.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} \tag{12}$$

[補足] 係数 A, B, C の別の求め方として, 値を代入して決める方法がある. 式 (6) の両辺に $(x+1)$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = A + \frac{(x+1)(Bx+C)}{x^2+1} \tag{13}$$

に $x=-1$ を代入すると $x+1=0$ なので,

$$\frac{3}{2} = A \tag{14}$$

を得る. 次に, 式 (6) の両辺に (x^2+1) を掛けたもの

$$\frac{x^2+2}{x+1} = \frac{A(x^2+1)}{x+1} + Bx + C \tag{15}$$

に $x=i$ (i は虚数単位, $i^2=-1$) を代入すると $x^2+1=0$ なので,

$$\frac{1}{i+1} = Bi + C \tag{16}$$

を得る.

$$\frac{1}{i+1} = \frac{-i+1}{(-i+1)(i+1)} = \frac{-i+1}{1^2-i^2} = \frac{-i+1}{1-(-1)} = \frac{-i+1}{2} = \left(-\tfrac{1}{2}\right) i + \tfrac{1}{2} \tag{17}$$

なので, 式 (16) の右辺と見較べることで, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$ を得ることができる.

ステップ 4

部分分数分解後の各項を積分すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(x - 1 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \right) dx && (18)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}I_1 + \tfrac{1}{2}I_2 && (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{x^2+1}\,dx &&= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c_1 && (20)\\ I_2 &= \int \frac{dx}{x^2+1} &&= \arctan x + c_2 && (21) \end{aligned}$$

となる. 即ち, 答は,

$$\begin{aligned} F(x) = &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + c_1\right) + \tfrac{1}{2}(\arctan x + c_2) && (22)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{4}\log(x^2+1) + \tfrac{1}{2}\arctan x + c && (23) \end{aligned}$$

である. ただし c $(= -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2)$ は積分定数である.

ステップ 5

計算ミスをしたかもしれないので, 積分結果を微分して, 問題の積分の被積分関数に一致することを確認するのが望ましい.

$$\begin{aligned} F'(x) &= x - 1 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} && (24)\\ &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1) + \frac{3}{2}(x^2+1) - \frac{1}{4}\cdot 2x(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} && (25)\\ &= \frac{x^4 - 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{(x+1)(x^2+1)} && (26)\\ &= \frac{x^4+x^2+1}{(x+1)(x^2+1)} \quad \text{（一致した）} && (27) \end{aligned}$$

有理関数の不定積分の計算例 (分母が重根を持つ場合)

【問題】　不定積分　$F(x) = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$　を求めよ.

【解答】

$\boxed{\text{ステップ 1}}$ 被積分関数の分子の多項式の次数 2 は 分母の多項式の次数 3 より小さいので, 何もせずに進む.

$\boxed{\text{ステップ 2}}$ 分母の多項式は既に 1 次式の積の形に完全に因数分解されているので, 何もせずに進む.

$\boxed{\text{ステップ 3}}$

本問題の被積分関数は, 別紙配布資料で述べたように, A, B, C を定数として,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{1}$$

の形に部分分数分解できる. 両辺に $(x-1)(x+1)^2$ を掛けると,

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \tag{2}$$

$$= (A+B)x^2 + (2A+C)x + A - B - C \tag{3}$$

と成るので,

$$A + B = 1 \tag{4}$$

$$2A + C = 0 \tag{5}$$

$$A - B - C = 1 \tag{6}$$

を満たす A, B, C の値の組を見つけることができれば, その形に変形できることを確かめたことになる. (4)+(5)+(6) より, $4A = 2$, $\therefore\ A = \frac{1}{2}$. これを (4) に代入して $B = 1 - A = \frac{1}{2}$. (5) に代入して $C = -2A = -1$. このようにして下記の部分分数分解結果を得ることができた.

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \tag{7}$$

[補足]

試験答案を採点していると, 式 (1) の右辺の 2 番目の項（係数 B の掛けられた項）に相当する項を忘れる間違いを良く見かける. そうなりそうな人は, まず「分母が n 次式の項の分子は $n-1$ 次式にする」と覚えると良い. 即ち,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B'x+C'}{(x+1)^2} \tag{8}$$

の形が, 基本的な分解方法なのである. しかし, 上式の右辺第 2 項は不定積分が即座に書き下せるような形をしていないので,

$$\frac{B'x+C'}{(x+1)^2} = \frac{B'(x+1) - B' + C'}{(x+1)^2} = \frac{B'}{x+1} + \frac{C'-B'}{(x+1)^2} \tag{9}$$

と変形し, B', C' の代わりに, $B = B'$, $C = C' - B'$ を未知数として決定することにしたのが式 (1) であるというふうに理解しておけば項を忘れることは起きにくくなるであろう.

[補足] x に値を代入することで係数（A, B, C）を求める方法は, 分母に 2 乗以上の因子が含まれる場合は, そのままでは行き詰まる. 以下ではその困難を具体的に見た上で, それを回避する工夫を呈示する. 式 (1) の両辺に $(x-1)$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = A + \frac{x-1}{x+1}B + \frac{x-1}{(x+1)^2}C \tag{10}$$

に $x=1$ を代入すると $x-1=0$ なので,

$$\frac{2}{4}=A, \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{2} \tag{11}$$

を得る. 次に, 式 (1) の両辺に $(x+1)^2$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(x+1)^2}{x-1}A+(x+1)B+C \tag{12}$$

に $x=-1$ を代入すると $x+1=0$ なので,

$$\frac{2}{-2}=C, \qquad \therefore \quad C=-1 \tag{13}$$

を得る. しかし, 式 (1) の両辺に $(x+1)$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x-1}A+B+\frac{1}{x+1}C \tag{14}$$

には, $x=\pm 1$ を代入することができないので（分母がゼロになる項があるから）, A, C の値を使わずに B の値だけを求めることのできる代入操作は存在しない. これが素朴な代入法の直面する困難である.

ところが, よく考えてみると, この問題の場合は代入法で決め損ねた未知数は B ひとつだけなので, 既に求まった A,C の値を使えば B の値は求まる. 即ち,

$$\begin{aligned} B &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x+1}{x-1}A-\frac{1}{x+1}C && (15)\\ &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x+1}{2(x-1)}+\frac{1}{x+1} && (16)\\ &= \frac{x^2+1-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}+x-1}{(x-1)(x+1)} && (17)\\ &= \frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}{x^2-1} && (18)\\ &= \frac{1}{2} && (19)\end{aligned}$$

として求まる.

更に考えてみると, このような煩瑣な文字式の計算をする必要はない. x に（どの項の分母をもゼロにしない）適当な値を代入して計算しても答は求まるのである. 例えば $x=0$ を式 (15) に代入すれば, 下記のように数値だけの簡便な計算で B の値が求まる.

$$B=\frac{0^2+1}{(0-1)(0+1)}-\frac{0+1}{0-1}A-\frac{1}{0+1}C=-1+A-C=-1+\tfrac{1}{2}-(-1)=\tfrac{1}{2} \tag{20}$$

決め損ねた未知数が 2 個ある場合も, x の値として 2 つの数を使えば, 2 個の未知数についての連立方程式が得られるので, それを解いて未知数を決めればよい. 連立方程式を解く手間は生じるが, 文字式の煩瑣な計算と比較すれば, 十分に楽である.

ステップ 4

部分分数分解後の各項を積分すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2} && (21)\\ &= \tfrac{1}{2}\log|x-1|+\tfrac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{x+1}+c && (22)\\ &= \frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|+\frac{1}{x-1}+c \qquad (\because\ \log a+\log b=\log ab) && (23)\end{aligned}$$

を得る. ただし c は積分定数である.

ステップ 5

計算ミスの可能性があるため, 積分結果を微分して被積分関数に一致することを確認することが望ましい.

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} \quad (\text{一致}) \tag{24}$$

無理関数の不定積分の計算例 No.1

— 「2 次の項の係数が正である 2 次式」の平方根が被積分関数に含まれる場合 —

【問題】　不定積分　$F(x) = \displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\ dx$　を求めよ．ただし a は実数の定数とする $(-\infty < a < \infty)$.

【解答】

平方根内の x^2 の項の係数が正である場合の定石に従い，

$$t = \sqrt{x^2+a}\ +\ x \tag{1}$$

と置く ($t = \sqrt{x^2+a}\ -\ x$ と置いても求まる）．式 (1) の右辺にある x を左辺に移項して得た

$$t - x = \sqrt{x^2+a} \tag{2}$$

の両辺を 2 乗すると，

$$\begin{aligned} t^2 - 2tx + x^2 &= x^2 + a \quad \text{（両辺にある } x^2 \text{ が相殺することに注目）} && (3)\\ 2tx &= t^2 - a \quad (x \text{ については 1 次式であることに注目}) && (4)\\ x &= \frac{t^2-a}{2t} \quad (x \text{ を } t \text{ で表す際に} \sqrt{}\text{が不要なことに注目）} && (5) \end{aligned}$$

を得る．式 (5) の両辺を t で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{(t^2-a)' \cdot 2t - (t^2-a)\cdot(2t)'}{(2t)^2} && (6)\\ &= \frac{2t\cdot 2t - (t^2-a)\cdot 2}{(2t)^2} && (7)\\ &= \frac{4t^2 - 2t^2 + 2a}{4t^2} && (8)\\ &= \frac{2t^2+2a}{4t^2} && (9)\\ &= \frac{t^2+a}{2t^2} && (10) \end{aligned}$$

を得る．従って，

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sqrt{x^2+a}\ dx && (11)\\ &= \int (t-x)\,\frac{dx}{dt}\,dt \qquad (\because \text{ 式 (2) および置換積分法}) && (12)\\ &= \int \left(t - \frac{t^2-a}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt \qquad (\because \text{ 式 (5) および式 (10)}) && (13)\\ &= \int \frac{2t^2-t^2+a}{2t}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt && (14)\\ &= \int \frac{(t^2+a)(t^2+a)}{2t\cdot 2t^2}\,dt && (15)\\ &= \tfrac{1}{4}\int \frac{(t^2+a)^2}{t^3}\,dt && (16)\\ &= \tfrac{1}{4}\int \frac{t^4+2at^2+a^2}{t^3}\,dt && (17) \end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{4}\int\left(t+\frac{2a}{t}+\frac{a^2}{t^3}\right)dt \tag{18}$$
$$= \frac{t^2}{8}+\frac{a}{2}\log|t|-\frac{a^2}{8t^2}+c \qquad (c\text{ は積分定数}) \tag{19}$$
$$= \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{a^2}{t^2}\right)+\frac{a}{2}\log|t|+c \tag{20}$$

を得る．式 (1) を式 (20) に代入すると答が得られるが, その準備としてまず第 1 項を整理しておく．

$$\frac{a}{t} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} \qquad (\because\ \text{式 (1)}) \tag{21}$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)} \qquad (\text{分母と分子に同一の項を乗じた}) \tag{22}$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}\right)^2-x^2} \qquad (\text{その結果として分母が有理化される（}\surd\text{が消える）}) \tag{23}$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{x^2+a-x^2} \tag{24}$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)}{a} \tag{25}$$
$$= \sqrt{x^2+a}-x \tag{26}$$

であるから,

$$t^2-\frac{a^2}{t^2} = t^2-\left(\frac{a}{t}\right)^2 \tag{27}$$
$$= \left(\sqrt{x^2+a}+x\right)^2-\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)^2 \qquad (\because\ \text{式 (1) および式 (26)}) \tag{28}$$
$$= \left\{\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)-\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)\right\}\left\{\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)+\left(\sqrt{x^2+a}-x\right)\right\} \tag{29}$$
$$= 2x\cdot 2\sqrt{x^2+a} \tag{30}$$
$$= 4x\sqrt{x^2+a} \tag{31}$$

を得る．式 (1) および式 (31) を式 (20) に代入すると,

$$F(x) = \frac{1}{8}\cdot 4x\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+c \tag{32}$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+c \qquad (\text{答}) \tag{33}$$

を得る．

[補足] 式 (1) の代わりに $t=\sqrt{x^2+a}-x$ と置いて計算した場合の結果は

$$F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}-\frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}-x\right|+c \tag{34}$$

である．式 (34) を式 (33) に一致する形に変形するには, 対数関数の性質「$A>0, B>0$ のとき $\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$」, および, 式 (21)〜式 (26) で示された

$$\sqrt{x^2+a}-x=\frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} \tag{35}$$

を利用して,

$$\log\left|\sqrt{x^2+a}-x\right|=-\log\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+a}-x}\right|=-\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{a}\right|=-\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+\log|a| \tag{36}$$

という式変形を行い, $-\frac{a}{2}\log|a|$ を c に繰り込めばよい．

無理関数の不定積分の計算例 No.2

—「2 次の項の係数が負である 2 次式」の平方根が被積分関数に含まれる場合 —

【問題】 不定積分 $F(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$ を求めよ．ただし a は正の実数の定数とする $(0 < a < \infty)$.

【解答その１】

この問題の被積分関数を有理化する（根号をなくす）置換方法は複数あるが, 置換の結果得られた有理関数の不定積分がなるべく容易に求まるような置換方法を選ぶのが賢明である．この問題の場合は,

$$x = a \sin t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

と置くのが最良の選択である．式 (1) の置換が可能である理由は, 被積分関数の根号の中身を負にしない範囲, 即ち,

$$a^2 - x^2 \ge 0 \qquad \therefore \quad -a \le x \le a \tag{2}$$

に x の値が制限されることである．t の値を範囲 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限したお陰で,

$$t = \arcsin \frac{x}{a} \qquad (-a \le x \le a) \tag{3}$$

と書き表せること（注意：逆三角関数の一般的な定義では,「$u = \arcsin v$」と「$v = \sin u$ かつ $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$」が同値である）, および,

$$\cos t \ge 0 \qquad \therefore \ \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

が成り立つことを使って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \sqrt{a^2 - x^2}\ \frac{dx}{dt}\ dt \qquad (\because \text{ 置換積分}) && (5)\\
&= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\ \left(\frac{d}{dt} a \sin t\right) dt \qquad \left(\because \text{ 式 } (1)\right) && (6)\\
&= \int a\sqrt{1 - \sin^2 t}\ a \cos t dt \qquad \left(\because \ (\sin t)' = \cos t\right) && (7)\\
&= a^2 \int \cos^2 t dt \qquad \left(\because \text{ 式 } (4)\right) && (8)\\
&= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \qquad (\because \text{ 半角公式 } \cos^2 \tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1 + \cos \theta}{2} \text{ で } \theta = 2t \text{ としたものを使った}) && (9)\\
&= a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + c \qquad (c \text{ は積分定数}) && (10)
\end{aligned}$$

を得る．式 (10) に現れる t を全て x で表せば答となる．ただし $\sin 2t$ については, 単に式 (3) を代入して得られる $\sin\left(2 \arcsin \frac{x}{a}\right)$ のような取り扱いのしにくい表式で答えるのではなく,

$$\sin 2t = 2 \sin t \ \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{11}$$

のように扱いやすい簡明な形で表せることに気づいて欲しい．式 (3), (11) を式 (10) に代入して下記の答を得る．

$$\begin{aligned}
F(x) &= a^2 \left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c && (12)\\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c \qquad (\text{答}) && (13)
\end{aligned}$$

【解答その２】

置換積分の練習として, 別の定石的置換法を試してみよう.

[1] 被積分関数の有理化

$$F(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{(a-x)(a+x)}\,dx = \int \sqrt{\frac{(a-x)(a+x)^2}{a+x}}\,dx \tag{14}$$

$$= \int (a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx \qquad (\because \quad a+x>0) \tag{15}$$

と変形できるので, 定石に従い,

$$t = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \tag{16}$$

と置くと,

$$t^2 = \frac{a-x}{a+x} \qquad (\because \text{ 両辺を 2 乗した}) \tag{17}$$

$$t^2 a + t^2 x = a - x \qquad (\because \text{ 両辺に } a+x \text{ を乗じた}) \tag{18}$$

$$x + t^2 x = a - t^2 a \qquad (\because \text{ 左辺の } t^2 a \text{ を右辺に, 右辺の } -x \text{ を左辺に移項した}) \tag{19}$$

$$(1+t^2)\,x = (1-t^2)\,a \qquad (\because \text{ 左辺では } x\text{, 右辺では } a \text{ という共通因子をくくり出した}) \tag{20}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,a \qquad (\because \text{ 両辺を } 1+t^2 \text{ で割った}) \tag{21}$$

を得る. 式 (21) の両辺を t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\,a\right) = \frac{(1-t^2)'\cdot(1+t^2) - (1-t^2)\cdot(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}\,a \qquad \left(\because \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\right) \tag{22}$$

$$= \frac{(-2t)\cdot(1+t^2) - (1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}\,a = \frac{-4at}{(1+t^2)^2} \tag{23}$$

を得る. 置換積分してから式 (16), (21), (23) を使って式変形を進めると,

$$F(x) = \int (a+x)\cdot\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt = \int \left(a + \frac{1-t^2}{1+t^2}\,a\right)\cdot t\cdot\frac{-4at}{(1+t^2)^2}\,dt \tag{24}$$

$$= \int \frac{2}{1+t^2}\,a\cdot t\cdot\frac{-4at}{(1+t^2)^2}\,dt = -8a^2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt \tag{25}$$

となり, 有理関数の不定積分に変換することができた.

[2] 被積分関数の部分分数分解

部分分数分解の一般論によると, 式 (25) の被積分関数は $b_1 \sim b_6$ を未知の定数として,

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{b_1 t + b_2}{(1+t^2)^3} + \frac{b_3 t + b_4}{(1+t^2)^2} + \frac{b_5 t + b_6}{1+t^2} \tag{26}$$

の形に分解できる. 連立方程式を立てて未知数を決定すれば $b_1 = b_3 = b_5 = b_6 = 0$, $b_2 = -1$, $b_4 = 1$ を得る.

実は, この被積分関数では変数 t は t^2 の形でしか現れないので, $s = t^2$ と置いてから部分分数分解してもよい. 部分分数分解の一般論によれば, この場合は,

$$\frac{s}{(1+s)^3} = \frac{b_2}{(1+s)^3} + \frac{b_4}{(1+s)^2} + \frac{b_6}{1+s} \tag{27}$$

の形に分解できる. 連立方程式を立てて解けば, $b_2 = -1$, $b_4 = 1$, $b_6 = 0$ を得る. 要する手間は半減した.

更には, 被積分関数をじっくりと眺めて下記のような変形に気がつけば, 手間はほとんどかからなくなる.

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^3} \tag{28}$$

このようにして下式を得る.

$$F(x) = -8a^2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + 8a^2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^3} \tag{29}$$

[3] 部分分数分解結果の不定積分

配布資料「万能積分法」の ii 頁 に記した積分公式

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan u + c_1 \qquad (c_1 \text{ は積分定数}) \tag{30}$$

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^3} = \frac{u(3u^2+5)}{8(u^2+1)^2} + \frac{3}{8}\arctan u + c_2 \qquad (c_2 \text{ は積分定数}) \tag{31}$$

で式 (29) の不定積分を置き換えると,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{-4a^2 t}{t^2+1} - 4a^2 \arctan t + \frac{a^2 t(3t^2+5)}{(t^2+1)^2} + 3a^2 \arctan t + c' \qquad (c' \text{ は積分定数}) && (32)\\
&= (-4+3)a^2 \arctan t - a^2 t \left\{ \frac{4(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - \frac{3t^2+5}{(t^2+1)^2} \right\} + c' && (33)\\
&= -a^2 \arctan t - a^2 t \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} + c' && (34)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - a^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \cdot \frac{\frac{a-x}{a+x} - 1}{\left(\frac{a-x}{a+x}+1\right)^2} + c' \qquad (\because \ (16) \text{ 式}) && (35)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - a^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \cdot (a+x) \cdot \frac{(a-x)-(a+x)}{\{(a-x)+(a+x)\}^2} + c' && (36)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - a^2 \sqrt{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{-2x}{4a^2} + c' && (37)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + c' \qquad (\text{答}) && (38)
\end{aligned}$$

を得る.

[4] 最初の解法による解との一致の確認

式 (38) と式 (13) は同値な式であるはずである. 実際, 逆三角関数の関係式

$$\arcsin u = \frac{\pi}{2} - 2\arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \qquad (0 \le u \le 1) \tag{39}$$

(証明は後述）を使えば,

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2}\cdot 2\arctan\sqrt{\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}} + c = \frac{\pi a^2}{4} + c - a^2 \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \tag{40}$$

となるので, $c' = c + \frac{\pi a^2}{4}$ ととれば, 両式が一致することがわかる.

[5] 式 (39) の証明

三角関数の間に成り立つ関係式

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \tag{41}$$

で $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ とすれば, $\tan\frac{\theta}{2}\ge 0$ なので,

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \qquad \therefore \quad \frac{\theta}{2}=\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \tag{42}$$

を得る．$u=\cos\theta$ とすれば, $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ では $\theta=\arccos u$ なので,

$$\arccos u=2\arctan\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \tag{43}$$

を得る．ここで逆三角関数の間に成り立つ基本的な関係式 (証明は後述)

$$\arcsin u+\arccos u=\frac{\pi}{2} \tag{44}$$

を使うと下式を得る．

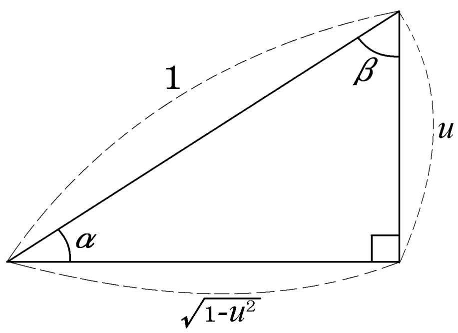
$$\arcsin u=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \tag{45}$$

[6] 式 (44) の証明

$0<u<1$ の場合について, 直観的に理解できる図形的な証明を行う．斜辺の長さが 1 である直角三角形を考える．直角を挟む 2 辺の長さを u, $\sqrt{1-u^2}$ とし, 長さ u の辺を対辺とする頂角を α, 長さ $\sqrt{1-u^2}$ の辺を対辺とする頂角を β とする．$0<u<1$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ が成り立っている．三角関数の三角比による定義により下式が成り立つ．

$$\sin\alpha=u \qquad \therefore \quad \alpha=\arcsin u \tag{46}$$

$$\cos\beta=u \qquad \therefore \quad \beta=\arccos u \tag{47}$$



三角形の内角の和は π なので,

$$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi \qquad \therefore \quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \tag{48}$$

が成り立つ．式 (46), (47) を式 (48) に代入すると,

$$\arcsin u+\arccos u=\frac{\pi}{2} \tag{49}$$

を得る．

全区間 $-1\le u\le 1$ について式 (44) $\left(=\text{式 (49)}\right)$ が成り立つことを証明するには, 三角関数の加法定理を使って, $\sin(\arcsin u+\arccos u)=1$ および $\cos(\arcsin u+\arccos u)=0$ を示し, これと逆三角関数の値域 ($-\frac{\pi}{2}\le\arcsin u\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\arccos u\le\pi$) から導かれる $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin u+\arccos u\le\frac{3\pi}{2}$ を合わせて考えると, $\arcsin u+\arccos u$ の値は $\frac{\pi}{2}$ に一意に決定されると結論すればよい.

三角関数の有理式の不定積分の計算例

【問題】不定積分 $F(x)=\displaystyle\int \frac{\sin\,x+\cos\,x}{(1+\sin\,x)\,(1+\cos\,x)}\,dx$ を求めよ.

【解答】

[1] :　積分変数を置き換えて有理式の積分に変換する

被積分関数が $\sin\,x$ および $\cos\,x$ の有理関数である場合の定石 (導出は後述の [4] で行う)

$$t=\tan\frac{x}{2}\quad とおくと\quad \cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\,x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2} \tag{1}$$

に従って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{\sin\,x+\cos\,x}{(1+\sin\,x)\,(1+\cos\,x)}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt \qquad (\because\ dx=\tfrac{dx}{dt}\cdot dt) && (2)\\ &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (\because\ 式\,(1)\,を代入した) && (3)\\ &= \int \frac{2t+1-t^2}{(1+t^2+2t)\,(1+t^2+1-t^2)}\cdot 2\,dt \qquad (\because\ 分母と分子に\,(1+t^2)\,を乗じた) && (4)\\ &= \int \frac{-t^2+2t+1}{t^2+2t+1}\,dt \qquad (\because\ 1+t^2+1-t^2=2) && (5) \end{aligned}$$

という変数 t についての有理式の不定積分になる.

[2] :　置き換えた変数に関する有理式の不定積分を求める

式 (5) の被積分関数の分母を因数分解すると,

$$F = \int \frac{-t^2+2t+1}{(t+1)^2}\,dt \tag{6}$$

となる. この場合, 被積分関数を部分分数分解するには, 分子も $t+1$ の多項式として書き表せばよい. 即ち,

$$\begin{aligned} (分子) &= -t^2+2t+1 && (7)\\ &= -\{(t+1)-1\}^2+2\{(t+1)-1\}^2+1 \qquad (\because\ t=(t+1)-1) && (8)\\ &= -(t+1)^2+2(t+1)-1+2(t+1)-2+1 && (9)\\ &= -(t+1)^2+4(t+1)-2 && (10) \end{aligned}$$

となる. これを式 (6) の分子に代入すると,

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{-(t+1)^2+4(t+1)-2}{(t+1)^2}dt && (11)\\ &= -\int dt+4\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+1)^2} && (12)\\ &= -t+4\log|t+1|+\frac{2}{t+1}+c \qquad (c\,は積分定数) && (13) \end{aligned}$$

を得る.

[3]： 得られた表式を元の変数で表す

式 (1) より $t = \tan \frac{x}{2}$ であるから,

$$F \;=\; -\tan\frac{x}{2} + 4\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c \qquad (c\text{ は積分定数}) \tag{14}$$

を得る．これが答である．

[4]： 式 (1) の導出方法

公式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割って得られる等式 $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入すると

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2} \tag{15}$$

が得られる．余弦の倍角公式 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入したものと式 (15) とから,

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{16}$$

が得られる．また, 正弦の倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入したものと式 (15) とから,

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\cdot t\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{17}$$

が得られる．最後に $t = \tan\frac{x}{2}$ の両辺を x で微分して得られる

$$\frac{dt}{dx} = \left\{\frac{d}{d\left(\frac{x}{2}\right)}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} \tag{18}$$

および式 (15) を使って,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2} \tag{19}$$

が得られる．

[5]： その他の有用な恒等式

三角関数で構成された数式は全く異なって見える別の形に表せることが多いので, 得られた積分結果がもっとシンプルな形に表せないか更に式変形を試みることが望ましい．また積分結果が問題の解答と一致しない場合に結果の一致を確かめることがしばしば必要となる．その際に役立ちそうな三角関数の恒等式を下記に掲げておく．

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \tag{20}$$

$$\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 1+\cos x \tag{21}$$

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \tag{22}$$

二重積分の練習問題

【1】 ≪ グラフで示された平面領域での二重積分の実行 ≫

下記の (1)〜(8) の 2 重積分を、各小問毎に図で示した領域 D に対して求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} \frac{y}{x}\, dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} x^2 y\, dxdy$

(3) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} \sin(x+y)\, dxdy$

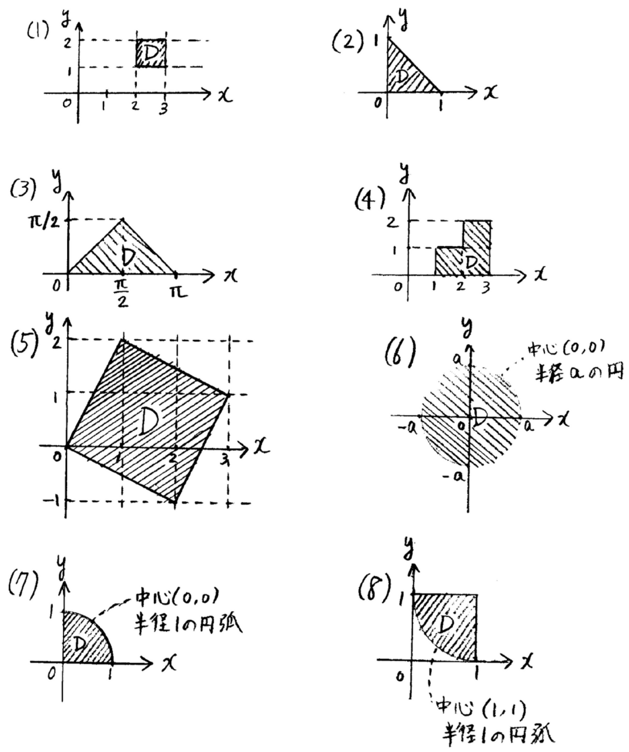
(4) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} (x+y^3)\, dxdy$

(5) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} x\, dxdy$

(6) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(7) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} xy^2\, dxdy$

(8) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} x^2\, dxdy$



【2】 ≪ 累次積分の積分順序の変更 ≫

下記の (1)〜(4) の等式の左辺の累次積分の表す積分領域を (x,y) 平面または (r,θ) 平面上に図示し、等式が任意の関数 $f(x,y)$ に対して恒等的に成立するように右辺の積分範囲を表す四角枠内を適切な数や式で埋めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-|x|} dy\, f(x,y) = \int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ア}} dy \int_{\boxed{エ}}^{\boxed{ウ}} dx\, f(x,y)$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2-x} dy\, f(x,y) = \int_{0}^{1} dy \int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ア}} dx f(x,y) + \int_{1}^{2} dy \int_{\boxed{エ}}^{\boxed{ウ}} dx\, f(x,y)$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2} dy\, f(x,y) + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{1} dy\, f(x,y) + \int_{2}^{3} dx \int_{0}^{2} dy\, f(x,y)$

$\displaystyle= \int_{0}^{1} dy \int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ア}} dx f(x,y) + \int_{1}^{2} dy \int_{\boxed{エ}}^{\boxed{ウ}} dx f(x,y) + \int_{\boxed{カ}}^{\boxed{オ}} dy \int_{2}^{3} dx f(x,y)$

$\displaystyle= \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{3} dx f(x,y) - \int_{\boxed{ク}}^{\boxed{キ}} dy \int_{\boxed{コ}}^{\boxed{ケ}} dx f(x,y)$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{\sin\theta} r dr\, f(r,\theta) = \int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ア}} r dr \int_{\boxed{エ}}^{\boxed{ウ}} d\theta\, f(r,\theta)$

三角関数の有理式の不定積分の計算例 (力学から)

【問題】不定積分 $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+\epsilon\cos x)^2}$ を求めよ．ただし ϵ は $-1 < \epsilon < 1$ を満たす定数とする．
（なお, これはケプラー運動の解を求める際に必要となる不定積分である．）

【解答】

[1]： 計算の主要部分

被積分関数が $\cos x$ （および $\sin x$) の有理関数である場合の定石

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{とおくと} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \tag{1}$$

に従って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{1}{(1+\epsilon\cos x)^2}\frac{dx}{dt}dt &(2)\\
&= \int \frac{1}{\left(1+\epsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt &(3)\\
&= \int \frac{(1+t^2)^2}{\left\{1+t^2+\epsilon(1-t^2)\right\}^2}\frac{2}{1+t^2}dt &(4)\\
&= 2\int \frac{1+t^2}{\left\{1+\epsilon+(1-\epsilon)t^2\right\}^2}dt &(5)\\
&= 2\int \frac{1+t^2}{(1+\epsilon)^2\left\{1+\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}t^2\right\}^2}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right) &(6)\\
&= \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}\int \frac{1+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)^2}{\left\{1+\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)^2\right\}^2}d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right) &(7)
\end{aligned}$$

を得る．更に,

$$u = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\,t \quad \left(= \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right) \tag{8}$$

とおいて 2 回目の置換積分を行うと,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}F &= \int \frac{1+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}u^2}{(1+u^2)^2}du &(9)\\
&= \int \frac{1-\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+u^2)}{(1+u^2)^2}du &(10)\\
&= \int \frac{-\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+u^2)}{(1+u^2)^2}du &(11)\\
&= -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\int\frac{du}{(1+u^2)^2}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\int\frac{du}{1+u^2} &(12)
\end{aligned}$$

を得る．右辺に現れた不定積分は,

$$\begin{aligned}
\int\frac{du}{1+u^2} &= \arctan u + c_1 \qquad c_1 \text{ は積分定数} &(13)\\
\int\frac{du}{(1+u^2)^2} &= \frac{1}{2}\arctan u + \frac{u}{2(1+u^2)} + c_2 \qquad c_2 \text{ は積分定数} &(14)
\end{aligned}$$

である (式 (14) は後述の [3] で導く)．これらを式 (7) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}F &= -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\left\{\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u + c_2\right\}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\arctan u + c_1 && (15)\\
&= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{u}{u^2+1}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan u + c \quad \left(c=c_1-\tfrac{2\epsilon}{1-\epsilon}c_2 \text{ とした}\right) && (16)\\
&= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}}{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\tan^2\frac{x}{2}+1}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c && (17)\\
&= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c && (18)
\end{aligned}
$$

を得る．式 (18) の両辺を $\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}$ で割れば答を得たことになる．

[2]： 積分結果の単純化

本稿では更に，(後述の [4] で導く) 恒等式

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x} \tag{19}$$

を利用して $\sin x$ と $\cos x$ を使って式 (18) の右辺第 1 項を表してみよう．

$$
\begin{aligned}
\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} &= \frac{\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} && (20)\\
&= \frac{(1+\cos x)\sin x}{\sin^2 x+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)^2} && (21)\\
&= \frac{(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)^2} \qquad (\because \sin^2 x = 1-\cos^2 x) && (22)\\
&= \frac{\sin x}{1-\cos x+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)} && (23)\\
&= \frac{1-\epsilon}{2}\cdot\frac{\sin x}{1+\epsilon\cos x} && (24)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}\left\{\left(-\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\right)\cdot\frac{1-\epsilon}{2}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c\right\} && (25)\\
&= -\frac{\epsilon}{(1-\epsilon^2)}\cdot\frac{\sin x}{1+\epsilon\cos x}+\frac{2}{(1-\epsilon^2)\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c' \quad \left(c'=\tfrac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}c\right) && (26)
\end{aligned}
$$

という形の答を得る．ここで c' は積分定数である．

[3]： 式 (14) の導出

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \int 1\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int(x)'\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx \tag{27}$$

$$= x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \int x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' dx \qquad (\because \text{部分積分法}) \tag{28}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} - \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx \tag{29}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \tag{30}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2} dx \tag{31}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \tag{32}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c \qquad (c \text{ は積分定数}) \tag{33}$$

[4] ： 式 (19) の導出

正接の定義式 (に成り得る式) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入して得られる

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \tag{34}$$

を, 正弦の倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入して得られる $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, および, 余弦の半角公式 $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ を使って式変形すると,

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sin x}{\frac{1}{2}(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \tag{35}$$

が得られる.