無理関数の不定積分の計算例 No.2

—「2 次の項の係数が負である 2 次式」の平方根が被積分関数に含まれる場合 —

【問題】 不定積分 $F(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$ を求めよ．ただし a は正の実数の定数とする $(0 < a < \infty)$.

【解答その１】

この問題の被積分関数を有理化する（根号をなくす）置換方法は複数あるが, 置換の結果得られた有理関数の不定積分がなるべく容易に求まるような置換方法を選ぶのが賢明である．この問題の場合は,

$$x = a \sin t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

と置くのが最良の選択である．式 (1) の置換が可能である理由は, 被積分関数の根号の中身を負にしない範囲, 即ち,

$$a^2 - x^2 \ge 0 \qquad \therefore \quad -a \le x \le a \tag{2}$$

に x の値が制限されることである．t の値を範囲 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限したお陰で,

$$t = \arcsin \frac{x}{a} \qquad (-a \le x \le a) \tag{3}$$

と書き表せること（注意：逆三角関数の一般的な定義では,「$u = \arcsin v$」と「$v = \sin u$ かつ $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$」が同値である）, および,

$$\cos t \ge 0 \qquad \therefore\ \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

が成り立つことを使って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt \qquad (\because \text{ 置換積分}) && (5)\\
&= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\,\left(\frac{d}{dt} a \sin t\right) dt \qquad \left(\because \text{ 式 } (1)\right) && (6)\\
&= \int a\sqrt{1 - \sin^2 t}\; a \cos t dt \qquad \left(\because\ (\sin t)' = \cos t\right) && (7)\\
&= a^2 \int \cos^2 t dt \qquad \left(\because \text{ 式 } (4)\right) && (8)\\
&= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \qquad (\because \text{ 半角公式 } \cos^2 \tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1+\cos\theta}{2} \text{ で } \theta = 2t \text{ としたものを使った}) && (9)\\
&= a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t\right) + c \qquad (c \text{ は積分定数}) && (10)
\end{aligned}$$

を得る．式 (10) に現れる t を全て x で表せば答となる．ただし $\sin 2t$ については, 単に式 (3) を代入して得られる $\sin\left(2 \arcsin \frac{x}{a}\right)$ のような取り扱いのしにくい表式で答えるのではなく,

$$\sin 2t = 2 \sin t\ \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{11}$$

のように扱いやすい簡明な形で表せることに気づいて欲しい．式 (3), (11) を式 (10) に代入して下記の答を得る．

$$\begin{aligned}
F(x) &= a^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c && (12)\\
&= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c \qquad (\text{答}) && (13)
\end{aligned}$$

【解答その２】

置換積分の練習として, 別の定石的置換法を試してみよう.

[1] 被積分関数の有理化

$$F(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{(a-x)(a+x)}\,dx = \int \sqrt{\frac{(a-x)(a+x)^2}{a+x}}\,dx \tag{14}$$

$$= \int (a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx \qquad (\because \quad a+x>0) \tag{15}$$

と変形できるので, 定石に従い,

$$t = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \tag{16}$$

と置くと,

$$t^2 = \frac{a-x}{a+x} \qquad (\because \text{ 両辺を 2 乗した}) \tag{17}$$

$$t^2 a + t^2 x = a - x \qquad (\because \text{ 両辺に } a+x \text{ を乗じた}) \tag{18}$$

$$x + t^2 x = a - t^2 a \qquad (\because \text{ 左辺の } t^2 a \text{ を右辺に, 右辺の } -x \text{ を左辺に移項した}) \tag{19}$$

$$(1+t^2)\,x = (1-t^2)\,a \qquad (\because \text{ 左辺では } x\text{, 右辺では } a \text{ という共通因子をくくり出した}) \tag{20}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,a \qquad (\because \text{ 両辺を } 1+t^2 \text{ で割った}) \tag{21}$$

を得る. 式 (21) の両辺を t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\,a\right) = \frac{(1-t^2)' \cdot (1+t^2) - (1-t^2)\cdot(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}\,a \qquad \left(\because \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\right) \tag{22}$$

$$= \frac{(-2t)\cdot(1+t^2) - (1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}\,a = \frac{-4at}{(1+t^2)^2} \tag{23}$$

を得る. 置換積分してから式 (16), (21), (23) を使って式変形を進めると,

$$F(x) = \int (a+x)\cdot\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt = \int \left(a + \frac{1-t^2}{1+t^2}\,a\right)\cdot t\cdot\frac{-4at}{(1+t^2)^2}\,dt \tag{24}$$

$$= \int \frac{2}{1+t^2}\,a\cdot t\cdot\frac{-4at}{(1+t^2)^2}\,dt = -8a^2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt \tag{25}$$

となり, 有理関数の不定積分に変換することができた.

[2] 被積分関数の部分分数分解

部分分数分解の一般論によると, 式 (25) の被積分関数は $b_1 \sim b_6$ を未知の定数として,

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{b_1 t + b_2}{(1+t^2)^3} + \frac{b_3 t + b_4}{(1+t^2)^2} + \frac{b_5 t + b_6}{1+t^2} \tag{26}$$

の形に分解できる. 連立方程式を立てて未知数を決定すれば $b_1 = b_3 = b_5 = b_6 = 0$, $b_2 = -1$, $b_4 = 1$ を得る.

実は, この被積分関数では変数 t は t^2 の形でしか現れないので, $s = t^2$ と置いてから部分分数分解してもよい. 部分分数分解の一般論によれば, この場合は,

$$\frac{s}{(1+s)^3} = \frac{b_2}{(1+s)^3} + \frac{b_4}{(1+s)^2} + \frac{b_6}{1+s} \tag{27}$$

の形に分解できる. 連立方程式を立てて解けば, $b_2 = -1$, $b_4 = 1$, $b_6 = 0$ を得る. 要する手間は半減した.

更には, 被積分関数をじっくりと眺めて下記のような変形に気がつけば, 手間はほとんどかからなくなる.

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^3} \tag{28}$$

このようにして下式を得る.

$$F(x) = -8a^2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + 8a^2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^3} \tag{29}$$

[3] 部分分数分解結果の不定積分

配布資料「万能積分法」の ii 頁 に記した積分公式

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan u + c_1 \qquad (c_1 \text{ は積分定数}) \tag{30}$$

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^3} = \frac{u(3u^2+5)}{8(u^2+1)^2} + \frac{3}{8}\arctan u + c_2 \qquad (c_2 \text{ は積分定数}) \tag{31}$$

で式 (29) の不定積分を置き換えると,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{-4a^2 t}{t^2+1} - 4a^2 \arctan t + \frac{a^2 t(3t^2+5)}{(t^2+1)^2} + 3a^2 \arctan t + c' \qquad (c' \text{ は積分定数}) && (32)\\
&= (-4+3)a^2 \arctan t - a^2 t \left\{ \frac{4(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - \frac{3t^2+5}{(t^2+1)^2} \right\} + c' && (33)\\
&= -a^2 \arctan t - a^2 t \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} + c' && (34)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - a^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \cdot \frac{\frac{a-x}{a+x}-1}{\left(\frac{a-x}{a+x}+1\right)^2} + c' \qquad (\because (16) \text{ 式}) && (35)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - a^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \cdot (a+x) \cdot \frac{(a-x)-(a+x)}{\{(a-x)+(a+x)\}^2} + c' && (36)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - a^2 \sqrt{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{-2x}{4a^2} + c' && (37)\\
&= -a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + c' \qquad (\text{答}) && (38)
\end{aligned}
$$

を得る.

[4] 最初の解法による解との一致の確認

式 (38) と式 (13) は同値な式であるはずである. 実際, 逆三角関数の関係式

$$\arcsin u = \frac{\pi}{2} - 2\arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \qquad (0 \le u \le 1) \tag{39}$$

(証明は後述）を使えば,

$$\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot 2\arctan \sqrt{\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}} + c = \frac{\pi a^2}{4} + c - a^2 \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \tag{40}$$

となるので, $c' = c + \frac{\pi a^2}{4}$ ととれば, 両式が一致することがわかる.

[5] 式 (39) の証明

三角関数の間に成り立つ関係式

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \tag{41}$$

で $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ とすれば, $\tan\frac{\theta}{2}\ge 0$ なので,

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\qquad \therefore\quad \frac{\theta}{2}=\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \tag{42}$$

を得る．$u=\cos\theta$ とすれば, $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ では $\theta=\arccos u$ なので,

$$\arccos u=2\arctan\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \tag{43}$$

を得る．ここで逆三角関数の間に成り立つ基本的な関係式 (証明は後述)

$$\arcsin u+\arccos u=\frac{\pi}{2} \tag{44}$$

を使うと下式を得る.

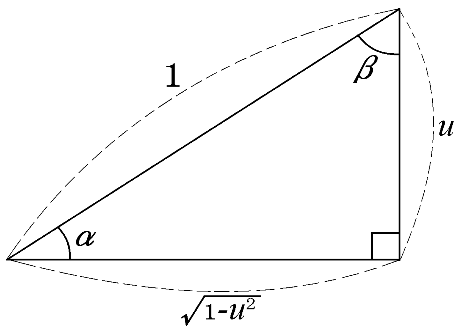
$$\arcsin u=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \tag{45}$$

[6] 式 (44) の証明

$0<u<1$ の場合について, 直観的に理解できる図形的な証明を行う．斜辺の長さが 1 である直角三角形を考える．直角を挟む 2 辺の長さを u, $\sqrt{1-u^2}$ とし, 長さ u の辺を対辺とする頂角を α, 長さ $\sqrt{1-u^2}$ の辺を対辺とする頂角を β とする．$0<u<1$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ が成り立っている．三角関数の三角比による定義により下式が成り立つ.

$$\sin\alpha=u \qquad \therefore\quad \alpha=\arcsin u \tag{46}$$

$$\cos\beta=u \qquad \therefore\quad \beta=\arccos u \tag{47}$$



三角形の内角の和は π なので,

$$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi \qquad \therefore\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \tag{48}$$

が成り立つ．式 (46), (47) を式 (48) に代入すると,

$$\arcsin u+\arccos u=\frac{\pi}{2} \tag{49}$$

を得る.

全区間 $-1\le u\le 1$ について式 (44) $\left(=\text{式 (49)}\right)$ が成り立つことを証明するには, 三角関数の加法定理を使って, $\sin(\arcsin u+\arccos u)=1$ および $\cos(\arcsin u+\arccos u)=0$ を示し, これと逆三角関数の値域 ($-\frac{\pi}{2}\le\arcsin u\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\arccos u\le\pi$) から導かれる $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin u+\arccos u\le\frac{3\pi}{2}$ を合わせて考えると, $\arcsin u+\arccos u$ の値は $\frac{\pi}{2}$ に一意に決定されると結論すればよい.