

無理関数の不定積分の計算例 No.1

— 「2 次の項の係数が正である 2 次式」の平方根が被積分関数に含まれる場合 —

【問題】 不定積分 $F(x) = \int \sqrt{x^2 + a} dx$ を求めよ. ただし a は実数の定数とする ($-\infty < a < \infty$).

【解答】

平方根内の x^2 の項の係数が正である場合の定石に従い,

$$t = \sqrt{x^2 + a} + x \quad (1)$$

と置く ($t = \sqrt{x^2 + a} - x$ と置いても求まる). 式 (1) の右辺にある x を左辺に移項して得た

$$t - x = \sqrt{x^2 + a} \quad (2)$$

の両辺を 2 乗すると,

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a \quad (\text{両辺にある } x^2 \text{ が相殺することに注目}) \quad (3)$$

$$2tx = t^2 - a \quad (x \text{ については 1 次式であることに注目}) \quad (4)$$

$$x = \frac{t^2 - a}{2t} \quad (x \text{ を } t \text{ で表す際に } \sqrt{\quad} \text{ が不要なことに注目}) \quad (5)$$

を得る. 式 (5) の両辺を t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t^2 - a)' \cdot 2t - (t^2 - a) \cdot (2t)'}{(2t)^2} \quad (6)$$

$$= \frac{2t \cdot 2t - (t^2 - a) \cdot 2}{(2t)^2} \quad (7)$$

$$= \frac{4t^2 - 2t^2 + 2a}{4t^2} \quad (8)$$

$$= \frac{2t^2 + 2a}{4t^2} \quad (9)$$

$$= \frac{t^2 + a}{2t^2} \quad (10)$$

を得る. 従って,

$$F(x) = \int \sqrt{x^2 + a} dx \quad (11)$$

$$= \int (t - x) \frac{dx}{dt} dt \quad (\text{式 (2) および置換積分法}) \quad (12)$$

$$= \int \left(t - \frac{t^2 - a}{2t} \right) \cdot \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \quad (\text{式 (5) および式 (10)}) \quad (13)$$

$$= \int \frac{2t^2 - t^2 + a}{2t} \cdot \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \quad (14)$$

$$= \int \frac{(t^2 + a)(t^2 + a)}{2t \cdot 2t^2} dt \quad (15)$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + a)^2}{t^3} dt \quad (16)$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{t^4 + 2at^2 + a^2}{t^3} dt \quad (17)$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2a}{t} + \frac{a^2}{t^3} \right) dt \quad (18)$$

$$= \frac{t^2}{8} + \frac{a}{2} \log |t| - \frac{a^2}{8t^2} + c \quad (c \text{ は積分定数}) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{a^2}{t^2} \right) + \frac{a}{2} \log |t| + c \quad (20)$$

を得る. 式 (1) を式 (20) に代入すると答が得られるが, その準備としてまず第 1 項を整理しておく.

$$\frac{a}{t} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} \quad (\text{式 (1)}) \quad (21)$$

$$= \frac{a(\sqrt{x^2+a}-x)}{(\sqrt{x^2+a}+x)(\sqrt{x^2+a}-x)} \quad (\text{分母と分子に同一の項を乗じた}) \quad (22)$$

$$= \frac{a(\sqrt{x^2+a}-x)}{(\sqrt{x^2+a})^2 - x^2} \quad (\text{その結果として分母が有理化される (が消える)}) \quad (23)$$

$$= \frac{a(\sqrt{x^2+a}-x)}{x^2+a-x^2} \quad (24)$$

$$= \frac{a(\sqrt{x^2+a}-x)}{a} \quad (25)$$

$$= \sqrt{x^2+a}-x \quad (26)$$

であるから,

$$t^2 - \frac{a^2}{t^2} = t^2 - \left(\frac{a}{t} \right)^2 \quad (27)$$

$$= (\sqrt{x^2+a}+x)^2 - (\sqrt{x^2+a}-x)^2 \quad (\text{式 (1) および式 (26)}) \quad (28)$$

$$= \left\{ (\sqrt{x^2+a}+x) - (\sqrt{x^2+a}-x) \right\} \left\{ (\sqrt{x^2+a}+x) + (\sqrt{x^2+a}-x) \right\} \quad (29)$$

$$= 2x \cdot 2\sqrt{x^2+a} \quad (30)$$

$$= 4x\sqrt{x^2+a} \quad (31)$$

を得る. 式 (1) および式 (31) を式 (20) に代入すると,

$$F(x) = \frac{1}{8} \cdot 4x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \log |\sqrt{x^2+a}+x| + c \quad (32)$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \log |\sqrt{x^2+a}+x| + c \quad (\text{答}) \quad (33)$$

を得る.

[補足] 式 (1) の代わりに $t = \sqrt{x^2+a}-x$ と置いて計算した場合の結果は

$$F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} - \frac{a}{2} \log |\sqrt{x^2+a}-x| + c \quad (34)$$

である. 式 (34) を式 (33) に一致する形に変形するには, 対数関数の性質「 $A > 0, B > 0$ のとき $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$ 」, および, 式 (21) ~ 式 (26) で示された

$$\sqrt{x^2+a}-x = \frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} \quad (35)$$

を利用して,

$$\log |\sqrt{x^2+a}-x| = -\log \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+a}+x} \right| = -\log \left| \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{a} \right| = -\log |\sqrt{x^2+a}+x| + \log |a| \quad (36)$$

という式変形を行い, $-\frac{a}{2} \log |a|$ を c に繰り込めばよい.