三角関数の有理式の不定積分の計算例 (力学から)

【問題】不定積分 $F(x)=\int \frac{dx}{(1+\epsilon\cos x)^2}$ を求めよ．ただし ϵ は $-1<\epsilon<1$ を満たす定数とする．
（なお, これはケプラー運動の解を求める際に必要となる不定積分である．）

【解答】

[1]：計算の主要部分

被積分関数が $\cos x$ （および $\sin x$) の有理関数である場合の定石

$$t=\tan\frac{x}{2} \quad \text{とおくと} \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \left(\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\right),\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2} \tag{1}$$

に従って置換積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{1}{(1+\epsilon\cos x)^2}\frac{dx}{dt}dt & (2)\\
&= \int \frac{1}{\left(1+\epsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt & (3)\\
&= \int \frac{(1+t^2)^2}{\left\{1+t^2+\epsilon(1-t^2)\right\}^2}\frac{2}{1+t^2}dt & (4)\\
&= 2\int \frac{1+t^2}{\left\{1+\epsilon+(1-\epsilon)t^2\right\}^2}dt & (5)\\
&= 2\int \frac{1+t^2}{(1+\epsilon)^2\left\{1+\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}t^2\right\}^2}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right) & (6)\\
&= \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}\int \frac{1+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)^2}{\left\{1+\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)^2\right\}^2}d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right) & (7)
\end{aligned}$$

を得る．更に,

$$u=\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\,t\ \left(=\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right) \tag{8}$$

とおいて 2 回目の置換積分を行うと,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}F &= \int \frac{1+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}u^2}{(1+u^2)^2}du & (9)\\
&= \int \frac{1-\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+u^2)}{(1+u^2)^2}du & (10)\\
&= \int \frac{-\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+u^2)}{(1+u^2)^2}du & (11)\\
&= -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\int\frac{du}{(1+u^2)^2}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\int\frac{du}{1+u^2} & (12)
\end{aligned}$$

を得る．右辺に現れた不定積分は,

$$\begin{aligned}
\int\frac{du}{1+u^2} &= \arctan u+c_1 \qquad c_1 \text{ は積分定数} & (13)\\
\int\frac{du}{(1+u^2)^2} &= \frac{1}{2}\arctan u+\frac{u}{2(1+u^2)}+c_2 \qquad c_2 \text{ は積分定数} & (14)
\end{aligned}$$

である (式 (14) は後述の [3] で導く). これらを式 (7) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}F &= -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\left\{\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u + c_2\right\}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\arctan u + c_1 \quad (15)\\
&= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{u}{u^2+1}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan u + c \qquad \left(c = c_1 - \tfrac{2\epsilon}{1-\epsilon}c_2 \text{ とした}\right) \quad (16)\\
&= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}}{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\tan^2\frac{x}{2}+1}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c \quad (17)\\
&= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c \quad (18)
\end{aligned}
$$

を得る. 式 (18) の両辺を $\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}$ で割れば答を得たことになる.

[2] : 積分結果の単純化

本稿では更に, (後述の [4] で導く) 恒等式

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x} \quad (19)$$

を利用して $\sin x$ と $\cos x$ を使って式 (18) の右辺第 1 項を表してみよう.

$$
\begin{aligned}
\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} &= \frac{\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \quad (20)\\
&= \frac{(1+\cos x)\sin x}{\sin^2 x+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)^2} \quad (21)\\
&= \frac{(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)^2} \qquad (\because \sin^2 x = 1-\cos^2 x) \quad (22)\\
&= \frac{\sin x}{1-\cos x+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)} \quad (23)\\
&= \frac{1-\epsilon}{2}\cdot\frac{\sin x}{1+\epsilon\cos x} \quad (24)
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}\left\{\left(-\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\right)\cdot\frac{1-\epsilon}{2}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\epsilon}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c\right\} \quad (25)\\
&= -\frac{\epsilon}{(1-\epsilon^2)}\cdot\frac{\sin x}{1+\epsilon\cos x}+\frac{2}{(1-\epsilon^2)\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+c' \qquad \left(c' = \tfrac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}c\right) \quad (26)
\end{aligned}
$$

という形の答を得る. ここで c' は積分定数である.

[3] : 式 (14) の導出

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \int 1\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int (x)'\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx \quad (27)$$

$$= x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \int x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' dx \qquad (\because \text{部分積分法}) \tag{28}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} - \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx \tag{29}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \tag{30}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2} dx \tag{31}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \tag{32}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c \qquad (c\text{は積分定数}) \tag{33}$$

[4] ： 式 (19) の導出

正接の定義式 (に成り得る式) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入して得られる

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \tag{34}$$

を, 正弦の倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入して得られる $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, および, 余弦の半角公式 $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ を使って式変形すると,

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sin x}{\frac{1}{2}(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \tag{35}$$

が得られる.