微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全 4 頁中の第 1 頁目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 林・小野田・田嶋・保倉,　2012 年 2 月 7 日 1 限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問 (1)〜(3) に示した不定積分を求めよ。(10 点× 3 問=30 点)

(1) $I = \displaystyle\int x\sqrt{2+x^2}\,dx$　(2) $I = \displaystyle\int x^8 \log x\,dx$　(3) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+3)(x^2+1)}$

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 24 年 2 月 7 日	出題者: 林・小野田 田嶋・保倉	学 科	学籍番号	氏 名	(第 1 頁目) 得 点　/30

$\boxed{2}$ 下記の小問 (1),(2) に示した広義積分を求めよ。(10 点× 2 問=20 点)

(1) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2+x}{\sqrt{2-x}}\,dx$　　(2) $I = \displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 林・小野田・田嶋・保倉,　2012 年 2 月 7 日 1 限実施

$\boxed{3}$ 小問 (1)〜(4) に示した 2 重積分の値を求めよ。（10 点× 3 問=30 点 (第 3 頁)、10 点× 1 問=10 点 (第 4 頁上半分)

(1) $I = \displaystyle\int_D x^3 y \, dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, \ 4 \leq y \leq 5\}$

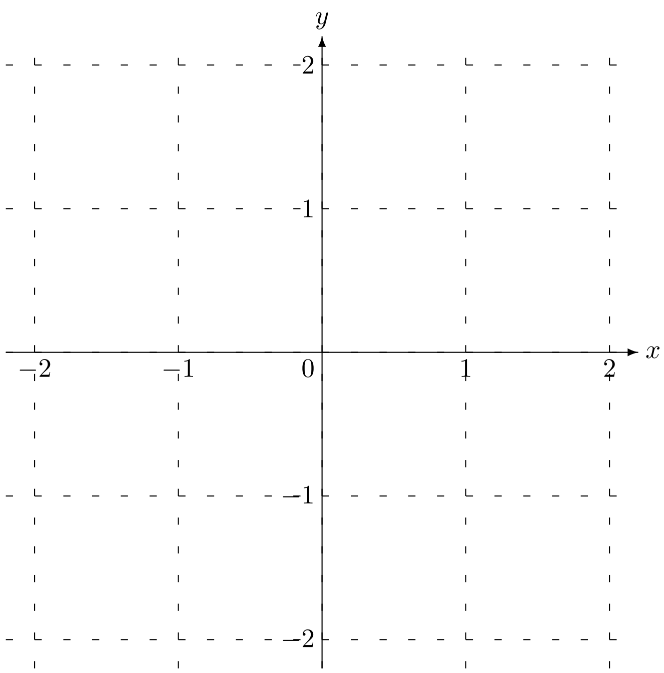
(2) $I = \displaystyle\int_D (x + y)^2 \, dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$

(3) $I = \displaystyle\int_D x^2 y^2 \, dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\boxed{3}$(つづき)　(4) $I = \int_D xy\,dxdy,\quad D = \left\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1\right\}$

$\boxed{4}$ 下記の等式が任意の $f(x,y)$ に対して成立するような領域 D を図示し、また, $\boxed{?}$に適切な数または数式を入れて右辺を完成させよ。(10 点× 1 問=10 点)

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} dx \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)\,dy$$



答:　(右辺)= $\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dx \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)\,dy$

科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 24 年 2 月 7 日	出題者: 林・小野田 田嶋・保倉	学科	学籍番号	氏名	得点 /20

$\boxed{1}$ (1) $I = \int x\sqrt{2+x^2}\,dx$.

$t = 2 + x^2$ とおくと. $dt = 2x\,dx$. $I = \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2+x^2)^{3/2} + C$

(2) $I = \int x^8 \log x\,dx$.

$I = \frac{1}{9}x^9\log x - \int \frac{1}{9}x^9\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{9}x^9\log x - \frac{1}{9}\int x^8 dx$

$= \frac{1}{9}x^9\log x - \frac{1}{81}x^9 + C = \frac{1}{9}x^9\left(\log x - \frac{1}{9}\right) + C$

(3) $I = \int \frac{dx}{(x+3)(x^2+1)}$

$\frac{1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと.

$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + (3B+C)x + 3C$

$= (A+B)x^2 + (3B+C)x + A + 3C$

$\therefore\ A+B=0,\quad 3B+C=0,\quad A+3C=1$

$\therefore\ A = \frac{1}{10},\ B = -\frac{1}{10},\ C = \frac{3}{10}$

$I = \int\left(\frac{\frac{1}{10}}{x+3} + \frac{-\frac{1}{10}x}{x^2+1} + \frac{\frac{3}{10}}{x^2+1}\right)dx$

$= \frac{1}{10}\log|x+3| - \frac{1}{20}\log|x^2+1| + \frac{3}{10}\arctan x + C$

$\boxed{2}$ (1) $I = \int_0^2 \frac{2+x}{\sqrt{2-x}}dx$.

$t = 2-x$ とおくと. $I = -\int_2^0 \frac{4-t}{\sqrt{t}}dt = \int_0^2 (4t^{-1/2} - t^{1/2})\,dt$

$I = \left[8t^{1/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{t=0}^{t=2} = 8\sqrt{2} - \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{20}{3}\sqrt{2}$

c.f. $\int \frac{2+x}{\sqrt{2-x}}dx = -\frac{2}{3}(x+10)\sqrt{2-x} + C$

(2) $I = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx$

$I = [-x^2e^{-x}]_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}dx$

$= 0 + 2[-xe^{-x}]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-x}dx$

$= 0 + 0 + 2[-e^{-x}]_0^\infty$

$= 2$

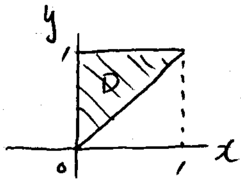
c.f. $\int x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$

3 (1) $I = \iint_D x^3 y \, dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid 2 \leq x \leq 3,\ 4 \leq y \leq 5\}$

$$I = \int_2^3 x^3 dx \int_4^5 y\, dy = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{x=2}^{x=3} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=4}^{y=5}$$

$$= \frac{1}{4}(81-16)\frac{1}{2}(25-16) = \frac{65\cdot 9}{4\cdot 2} = \frac{585}{8}$$

(2) $I = \iint_D (x+y)^2 dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$



$$I = \int_0^1 dy \int_0^y dx\, (x+y)^2$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{x=0}^{x=y} = \int_0^1 dy\, \frac{1}{3}\{(2y)^3 - y^3\}$$

$$= \frac{7}{3}\int_0^1 y^3 dy = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

(3) $I = \iint_D x^2 y^2 dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと. $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

$$I = \int_0^1 dr\cdot r \int_0^{2\pi} d\theta\ r^2\cos^2\theta\ r^2\sin^2\theta$$

$$= \int_0^1 r^5 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{24}$$

3 (4) $I = \iint_D xy\, dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + (\frac{y}{3})^2 \leq 1\}$

$x = r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$ とおくと. $dx\,dy = 3r\,dr\,d\theta$

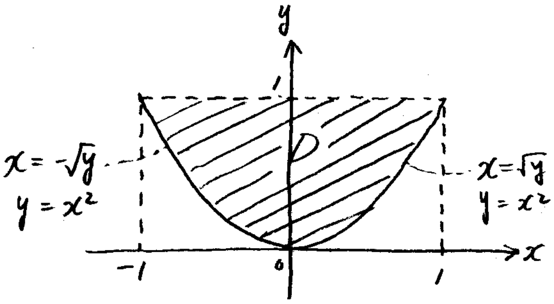
$$I = \int_0^1 dr\cdot 3r \int_0^{\pi/2} d\theta\ 3r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 9\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\theta\, d\theta$$

$$= 9\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

$$= \frac{9}{8}$$

$\boxed{4}$ $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$



$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy \quad (答)$$

$\boxed{3}$ (2) の別解

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy\,(x+y)^2 = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=x}^{y=1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{(x+1)^3 - 8x^3\right\} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(x+1)^4 - 2x^4\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}2^4 - 2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12} \quad (答)$$

$\boxed{3}$ (4) の別解 (その1)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{3\sqrt{1-x^2}} xy\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=3\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{9}{2}x(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8} \quad (答)$$

$\boxed{3}$ (4) の別解 (その2)

$$I = \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{9}y^2}} xy\,dx$$

$$= \int_0^3 dy \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-\frac{1}{9}y^2}}$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{9}y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{36}y^4\right]_{y=0}^{y=3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{81}{36}\right) = \frac{9}{8} \quad (答)$$