微分積分 II(c) 中間試験問題•答案用紙

2011 年 12 月 20 日 1 限実施

【全般的注意事項】解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また、積分定数として断り書きなしに c、c'、c'' 等の記号を用いてよい。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが、答案では arc$\cdots$ の形で書け。

【1】 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.
8 点

【2】 $I = \displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ を求めよ.
8 点

【3】 $I = \displaystyle\int e^{-\sin x}\cos x\,dx$ を求めよ.
8 点

【4】 $I = \displaystyle\int \frac{3x^2+3x+1}{x(x^2+1)}\,dx$ を求めよ.
8 点

【5】 $I = \displaystyle\int \arctan x\,dx$ を求めよ.
8 点

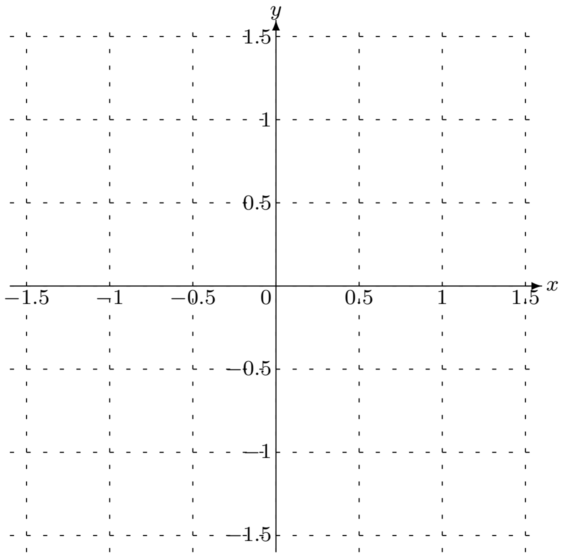
【6】 $I = \displaystyle\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2}\,dx$ を求めよ.
8 点

学科	学籍番号								氏名	得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	本頁小計	全頁合計

微分積分 II(c)　中間試験問題•答案用紙

【7】 8 点
$g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2+1} f(2t+1)\,dt$ を求めよ。

【9】 8 点
極座標表示された曲線　$r = |\cos\theta|$　$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$
のグラフの概形を描け。



【8】 8 点
$I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$ とする。$n \geq 2$ のとき、I_n を I_{n-2} を用いて表す漸化式を求めよ。積分定数は省略してよい。

【10】 8 点
パラメータ表示された曲線
$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$
の, パラメータ値が $0 \leq t \leq 2\pi$ に対応する部分の長さ L を求めよ。

学科	学籍番号	氏名	得点 [7] [8] [9] [10] 本頁小計

【11】 10 点 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos\,x}$ を求めよ。(ヒント： 例えば $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置いて置換積分すれば求まる)

学科		学籍番号									氏名		得点	[11]

【12】$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ を求めよ。ただし a は正の定数とする。
10 点

学科	学籍番号								氏名	得点 [12]

2011年度後期 微分積分II(c) 中間試験 解答・解説 (2011/12/20実施分)

[1] $I = \int_0^1 (x^{-1/2} + x^{1/2})\,dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{1/2} + \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{3/2}\right]_0^1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ (答)

(別解) $x=0$ で $x^{-1/2}$ が発散することを、もっと慎重に扱いたいなら、次のようにする。

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 (x^{-1/2}+x^{1/2})\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\left(2\varepsilon^{1/2} + \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{(答)}$$

[2] $I = \int_0^\infty x(-e^{-x})'\,dx = \left[x\cdot(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty x'(-e^{-x})\,dx$

$$= -\left[xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = -\left[xe^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty$$

$$= -0 - (0-1) = 1 \quad \text{(答)}$$

(別解) 積分区間の上端が∞であることを 厳密に扱うためには次のようにする。

$$I = \lim_{a\to\infty}\int_0^a xe^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\left\{-\left[xe^{-x}\right]_0^a - \left[e^{-x}\right]_0^a\right\}$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-ae^{-a} - e^{-a} + 1\right) = 0 + 0 + 1 = 1 \quad \text{(答)}$$

(補足) ・$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

・$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\nearrow\infty}{(x)}}{\underset{\searrow\infty}{(e^x)}} \underset{\uparrow\,\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underset{\searrow\infty}{e^x}} = 0$

[3] $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos x\,dx$

$$\therefore I = \int e^{-t}dt = -e^{-t} + C = -e^{-\sin x} + C \quad \text{(答)}$$

[4] $\frac{3x^2+3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと

$$3x^2+3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\therefore\ A+B=3,\quad C=3,\quad A=1$$

$$\therefore\ B = 3-A = 2$$

$$\therefore\ I = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \log|x| + \log(x^2+1) + 3\arctan x + C \quad \text{(答)}$$

[4] の補足説明

$J = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$ の求め方． $t = x^2+1$ とおくと． $dt = 2x\,dx$

$\therefore J = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log(x^2+1) + C$

[5]

$$I = \int 1 \cdot \arctan x\,dx = \int (x)' \arctan x\,dx$$

$$= x \arctan x - \int x (\arctan x)' dx \quad (\because \text{部分積分法})$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} \quad \left(\because (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C \quad (\text{答})$$

(補足) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$ の求め方は、[4]の補足説明を参照せよ．

[6] $t = \arctan x$ とおくと．

$$dt = \frac{dx}{1+x^2} \quad \left(\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\therefore I = \int (\arctan x)^4 \frac{dx}{1+x^2} = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C$$

$$= \frac{1}{5}(\arctan x)^5 + C \quad (\text{答})$$

[7] $h(t) = \int f(2t+1)\,dt$ とおくと． $h'(t) = f(2t+1)$．

$$g(x) = \frac{d}{dx}\{h(x^2+1) - h(1)\} = \frac{d}{dx}h(x^2+1)$$

$u = x^2+1$ とおくと．

$$\frac{d}{dx}h(x^2+1) = \frac{d\,h(u)}{du}\cdot\frac{du}{dt} = f(2u+1)\cdot 2x$$

$$= 2x\,f(2(x^2+1)+1) = 2x\,f(2x^2+3) \quad (\text{答})$$

[8] $I_n = \int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1}x \cdot \sin x\, dx$

$= \int \sin^{n-1}x\, (-\cos x)'\, dx$

$= \sin^{n-1}x\,(-\cos x) - \int (\sin^{n-1}x)'(-\cos x)\, dx$ （∵ 部分積分法）

$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cos^2 x\, dx$ $\left(\because (\sin^{n-1}x)' = (n-1)\sin^{n-2}x \cos x\right)$

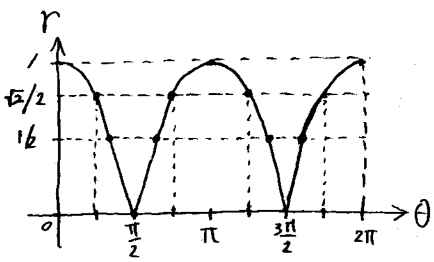
$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx$

$\therefore\ I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

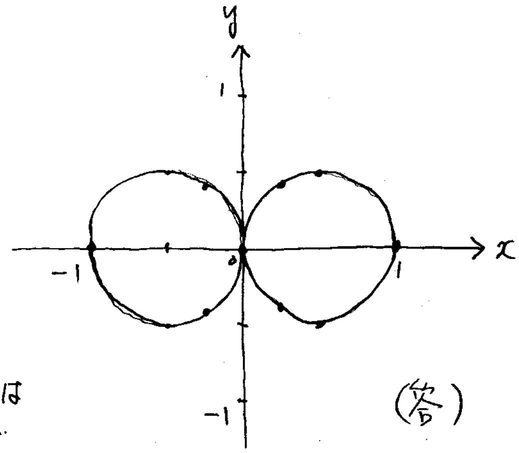
$\underbrace{I_n + (n-1)I_n}_{\shortparallel \atop nI_n} = (n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1}x \cos x$

$\therefore\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cos x$ （答）

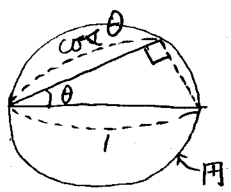
[9]



⇒



（答）



実は、
左図の関係より、答は
半径が $\frac{1}{2}$ で 中心が
$(\frac{1}{2}, 0)$ と $(-\frac{1}{2}, 0)$ にある
2つの円であることがわかる。

[10] $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}}\, dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \frac{t}{2}}\, dt$ （∵ $1 - \cos t = \cos^2 \frac{t}{2}$ 半角公式）

$= \int_0^{2\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt = 4\int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2}\, dt$ （∵ 理由は後述）

[10] (続き)

$$L = 4\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 8 \quad \text{(答)}$$

[補足説明] $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt$ の導出.

$0 \leqq t \leqq \pi$ で $\cos\frac{t}{2} \geqq 0$, $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ で $\cos\frac{t}{2} \leqq 0$ なので

$$\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = \int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt.$$

$u = 2\pi - t$ とおくと

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt = \int_{\pi}^{0}\cos\left(\pi - \frac{u}{2}\right)(-du)$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos\frac{u}{2} + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\frac{u}{2}\right)du = -\int_0^{\pi}\cos\frac{u}{2}\,du$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = \int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt + \int_0^{\pi}\cos\frac{u}{2}\,du = 2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt.$$

[11] $\displaystyle I = \int\frac{dx}{2+\cos x}.$

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと. $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt.$

$$\therefore I = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{2\,dt}{3+t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad \text{(答)}$$

[12] $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0)$

$x = a \sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおける.

$$I = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a \cos t \, dt$$

$$= a^2 \int |\cos t| \cos t \, dt$$

$$= a^2 \int \cos^2 t \, dt \qquad (\because -\tfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \tfrac{\pi}{2} \text{ で } \cos t \geqq 0$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t\right) + C$$

・ $t = \arcsin \frac{x}{a} \qquad (\because -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

・ $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \qquad (\because \cos t \geqq 0)$

$$= 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore\ I = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{2}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (\text{答})$$