$\boxed{1}$ 次の不定積分と定積分を計算せよ.（各 10 点）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 - x - 6}\ dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\ dx$ (3) $\displaystyle\int_0^2 e^x \sin x\ dx$

科目名	試験日	出題者	学科名/学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2011 年 (平成 22 年度) 2 月 8 日 (火曜 1 限)	保倉・田嶋 林・小野田			/30

$\boxed{2}$ 次の計算をせよ．ただし, k は実数の定数とする．（各 10 点）

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx$

科目名	試験日	出題者	学科名/学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2011 年 (平成 22 年度) 2 月 8 日 (火曜 1 限)	保倉・田嶋 林・小野田			/30

$\boxed{3}$ 次の 2 重積分を計算せよ.（各 10 点）

(7) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\ dxdy, \qquad D = \{(x,y)|\ \ 0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq 1\}.$

(8) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy, \qquad D = \{(x,y)|\ \ x^2+y^2 \leqq 1\}.$

科目名	試験日	出題者	学科名/学籍番号	氏　　　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2011 年 (平成 22 年度) 2 月 8 日 (火曜 1 限)	保倉・田嶋 林・小野田			/20

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ.（各 10 点）

(9) 曲線 $C : y = \dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad (0 \leqq x \leqq b, a > 0)$ の長さ $\ell(C)$ を計算せよ.

(10) $0 < a < b$ のとき, 積分順序の変更を利用して，次の累次積分 I を計算せよ.

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \, dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \, dy \right) dx$$

科目名	試験日	出題者	学科名/学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2011 年 (平成 22 年度) 2 月 8 日 (火曜 1 限)	保倉・田嶋 林・小野田			/20

$\boxed{1}$ (1) $I = \int \frac{x^2}{x^2-x-6}\,dx$.

$$\frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{(x^2-x-6)+x+6}{x^2-x-6} = 1 + \frac{x+6}{x^2-x-6}$$

$$\frac{x+6}{x^2-x-6} = \frac{x+6}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$ とおくと.

$$x+6 = A(x+2) + B(x-3) = (A+B)x + 2A-3B$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-3B=6 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} A=\frac{9}{5} \\ B=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\therefore I = \int\left\{1 + \frac{\frac{9}{5}}{x-3} - \frac{\frac{4}{5}}{x+2}\right\}dx$$

$$= x + \frac{9}{5}\log|x-3| - \frac{4}{5}\log|x+2| + C$$ （Cは積分定数）

(2) $I = \int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{-(\cos x)'}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$t = \cos x$ とおくと. $(\cos x)'dx = dt$ なので

$$I = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C \quad (答)$$

$$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \quad (答) \qquad \left(\because \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

(3) $I = \int_0^2 e^x \sin x\,dx$

$$= \left[e^x \sin x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x \cos x\,dx$$

$$= \left[e^x \sin x\right]_0^2 - \left[e^x \cos x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x \sin x\,dx$$

$$= \left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^2 - I$$

$$\therefore 2I = \left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^2$$

$$I = \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left\{e^2(\sin 2 - \cos 2) - e^0(\sin 0 - \cos 0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^2(\sin 2 - \cos 2) + 1\right\} \quad (答)$$

$\boxed{2}$ (4) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$ (答)

または.

$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[2\sqrt{x} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$ (答)

(5) $I = \int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx$

$k \neq 1$ のとき $I = \left[\frac{1}{1-k} \frac{1}{x^{k-1}} \right]_1^\infty = \frac{1}{1-k} \left\{ \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{k-1}} \right) - 1 \right\}$

$k > 1$ のとき $I = \frac{1}{1-k}(0-1) = \frac{1}{k-1}$

$k < 1$ のとき $I = \frac{1}{1-k}(+\infty - 1) = +\infty$ (又は 存在しない)

$k = 1$ のとき $I = \left[\log x \right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \log x - \log 1 = \infty - 0 = +\infty$

(6) $I = \int_0^\infty e^{-x^2} x \, dx$.

$t = x^2$ とおくと. $x\,dx = \frac{1}{2} dt$. $0 \le x < \infty$ は $0 \le t < \infty$ に対応.

$\therefore I = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = -0 + 1 = 1$ (答)

$\boxed{3}$ (7) $I = \iint_D (x-y)^2 dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, (x^2 - 2xy + y^2) \\
&= \int_0^1 dx \left[x^2 y - x y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6} \text{ (答)}
\end{aligned}
$$

または.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} (y-x)^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{3}(-x)^3 \right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (x-1)^4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{1}{12} 0 + \frac{1}{12} 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 - \frac{1}{12} \cdot 0 \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

または $I = \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \left(\int_0^1 dy \right) - 2 \left(\int_0^1 x dx \right) \left(\int_0^1 y dy \right) + \left(\int_0^1 dx \right) \left(\int_0^1 y^2 dy \right)$

$= \frac{1}{3} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

3 (8) $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$, $D = \{ (x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とすると. $dxdy = r\,dr\,d\theta$

Dは $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $x^2+y^2 = r^2$

$$\therefore I = \int_0^1 dr \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta \; e^{-r^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=1} \left[\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{0} \right) \cdot 2\pi = \pi (1 - e^{-1})$$ (答)

4 (9) $l = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

$$= \int_0^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a} e^{x/a} - \frac{1}{a} e^{-x/a} \right) \right\}^2} \, dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{1 + \frac{1}{4} e^{2x/a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2x/a}} \, dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{\frac{1}{4} \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a} \right)} \, dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)^2} \, dx$$

$$= \int_0^b \frac{1}{2} \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right) dx = \frac{1}{2} \left[a e^{x/a} - a e^{-x/a} \right]_{x=0}^{x=b}$$

$$= \frac{1}{2} \left(a e^{b/a} - a e^{-b/a} - a e^{0} + a e^{0} \right) = \frac{a}{2} \left(e^{b/a} - e^{-b/a} \right)$$ (答)

(10) $I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{y+1} - 0 \right) dy = \left[\log|y+1| \right]_{y=a}^{y=b} = \log|b+1| - \log|a+1|$$

$$= \log \frac{b+1}{a+1}$$ (答)

($0 < a < b$, $a \leq y \leq b$ より $y+1 > 0$ なので $\lim_{x \to +0} x^{y+1} = 0$)