【全般的注意事項】解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また、積分定数として断り書きなしに c、c'、c'' 等の記号を用いてよい。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが、答案では arc$\cdots$ の形で書け。

【1】8 点 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$ を求めよ.

【2】8 点 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$ を求めよ.

【3】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ を求めよ.

【4】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ.

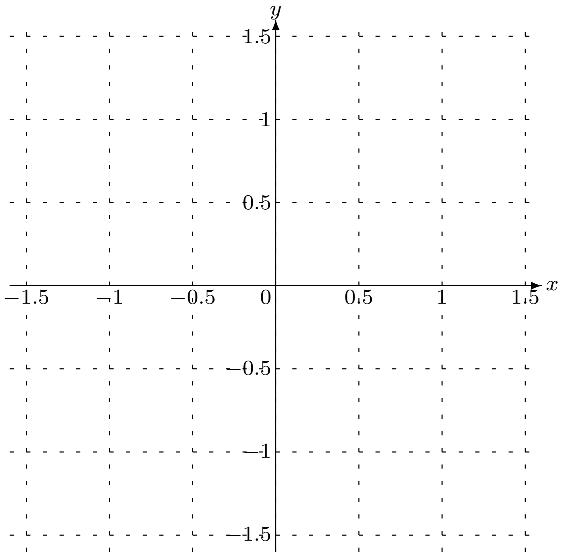
【5】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3x^2}$ を求めよ.

【6】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ を求めよ.

学科	学籍番号	氏名	得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	本頁小計	全頁合計

【7】 8 点 $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^5} f(t^3)dt$ とするとき $\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ.

【9】 8 点 極座標表示された曲線 $r = \sin\dfrac{\theta}{2}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ のグラフの概形を描け。



【8】 8 点 広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在する（有限の値を持つ）のは、正の実数の定数 α の値がどのような範囲にあるときかを論ぜよ。また、α の値がその範囲にあるときの積分値 I_α を求めよ。

【10】 8 点 極座標表示された曲線 $r = \sin\theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ に対応する部分の長さ L を求めよ。

学科	学籍番号	氏名	得点 [7]	[8]	[9]	[10]	本頁小計

【11】不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^4+13x^3+x^2-3x-4}{x^4-x^2}\,dx$ を求めよ.
10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	[11]

【12】不定積分 $\int \tan^3 x \, dx$ を求めよ。
10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	[12]

[1] $F=\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx$ $(\because (e^x)'=e^x)$

$= x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx$ (∵部分積分法)

$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx$

$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

$= x e^x - e^x + c$

$\therefore F = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + c) = (x^2 - 2x + 2) e^x + c'$ $(c' = -2c)$

[2] $F = \int x^2 e^{x^3} dx$.

$t = x^3$ とおくと、$dt = 3x^2 dx$. $\therefore x^2 dx = \frac{1}{3} dt$

$F = \int e^{x^3} x^2 dx = \int e^t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + c$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

[3] $F = \int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx$

$= \int (x)' \arcsin x \, dx$ $(\because (x)'=1)$

$= x \arcsin x - \int x (\arcsin x)' dx$ (∵部分積分法)

$= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$t = 1 - x^2$ とおくと、$dt = -2x\,dx$, $x\,dx = -\frac{1}{2} dt$.

$\therefore \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} 2\sqrt{t} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

$\therefore F = x \arcsin x - (-\sqrt{1-x^2} + c)$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c'$ $(c' = -c)$

[4] $F = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$t = \arcsin x$ とおくと $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\therefore F = \int (\arcsin x)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$

[5] $F = \int \frac{dx}{5+3x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2} dx$

$= \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{3}} \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2} \sqrt{\frac{3}{5}} dx.$

$t = \sqrt{\frac{3}{5}}x$ とおくと. $dt = \sqrt{\frac{3}{5}} dx$

$\therefore F = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{3}} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{3}} \arctan t + C$

$= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + C$

[6] $F = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$t = \sqrt{x}$ とおくと. $t^2 = x$. $\therefore 2t\,dt = dx$.

$\therefore F = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$

$= 2(t - \log|1+t|) + C$

$= 2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}) + C$

[7] $h(x) = \int f(x^3)dx$ とおけば. $h'(x) = \frac{d}{dx}h(x) = f(x^3)$

$$g(x) = \int_x^{x^5} f(t^3)\,dt = h(x^5) - h(x).$$

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}h(x^5) - \frac{d}{dx}h(x)$$

$$= \left(\frac{d}{du}h(u)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}x^5\right) - h'(x) \qquad (u = x^5 \text{ とおいた})$$

$$= h'(u)\ 5x^4 - h'(x)$$

$$= f(u^3)\ 5x^4 - f(x^3)$$

$$= \underline{5x^4 f(x^{15}) - f(x^3)}$$

[8] $I_\alpha = \lim\limits_{L\to\infty} \int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$

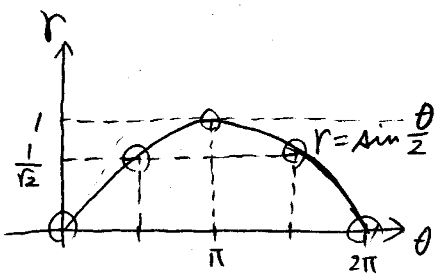
$\alpha \neq 1$ のとき $I_\alpha = \lim\limits_{L\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^L = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim\limits_{L\to\infty}L^{1-\alpha} - 1\right)$

$\begin{cases} \alpha > 1 \text{ のとき } 1-\alpha < 0 \text{ なので } \lim\limits_{L\to\infty} L^{1-\alpha} = 0 & \therefore\ I_\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1} \\ \alpha < 1 \text{ のとき } 1-\alpha > 0 \text{ なので } \lim\limits_{L\to\infty} L^{1-\alpha} = \infty & \therefore\ I_\alpha = \dfrac{+\infty}{1-\alpha} = +\infty \end{cases}$

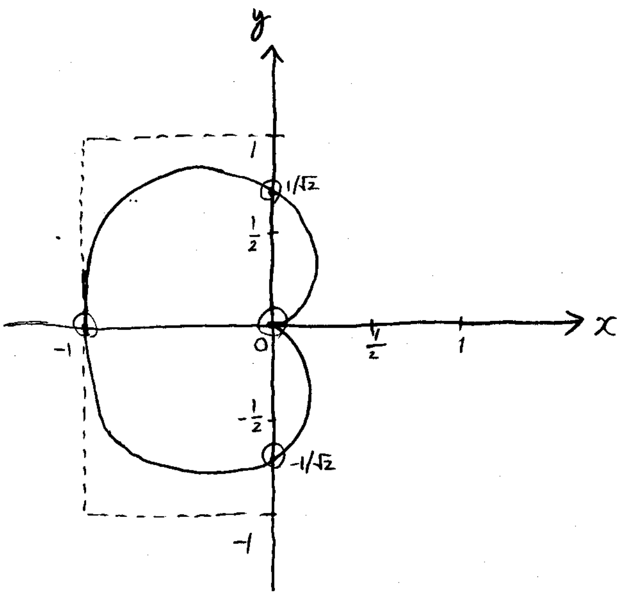
$\alpha = 1$ のとき $I_\alpha = \lim\limits_{L\to\infty}\left[\log x\right]_1^L = \lim\limits_{L\to\infty}\log L - \underbrace{\log 1}_{=0} = +\infty$

$\therefore$ $\alpha > 1$ のとき $I_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$, $0 < \alpha \leqq 1$ のとき $I_\alpha = +\infty$ (存在しない)

[9]



$\Rightarrow$



[10]

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$x = r(\theta)\cos\theta = \sin\theta\cos\theta \quad \therefore \frac{dx}{d\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

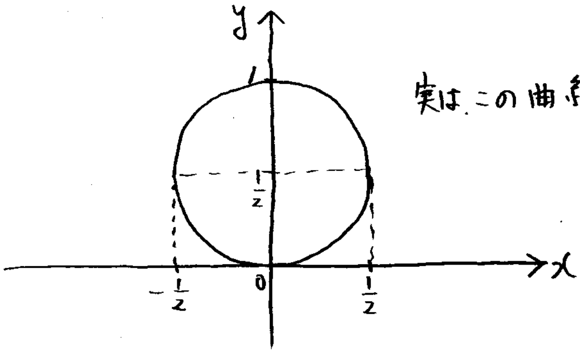
$y = r(\theta)\sin\theta = \sin^2\theta \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$$

$$\therefore L = \int_0^{\pi} \sqrt{1}\, d\theta = \pi$$

別解法

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$



実はこの曲線は 中心 $(0, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円 である。

$\because$ 点 (x, y) と 点 $(0, \frac{1}{2})$ 間のきょりの2乗は

$$
\begin{aligned}
& x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&= (\sin\theta\cos\theta)^2 + \left(\sin^2\theta - \tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&= \sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta - \sin^2\theta + \tfrac{1}{4} \\
&= \sin^2\theta \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1)}_{=0} + \tfrac{1}{4} \\
&= \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

[11] $f(x)=\dfrac{x^5+2x^4+13x^3+x^2-3x-4}{x^4-x^2}$ とする。求める積分は $F(x)=\int f(x)dx$ である。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
\hline
x^4-x^2 & x^5+2x^4+13x^3+x^2-3x-4 \\
 & x^5-x^3 \\
\hline
 & 2x^4+14x^3+x^2-3x-4 \\
 & 2x^4-2x^2 \\
\hline
 & 14x^3+3x^2-3x-4
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=x+2+g(x)$, $g(x)=\dfrac{14x^3+3x^2-3x-4}{x^4-x^2}$

$x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$ なので

$g(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{x+1}$ の形に部分分数分解できる。

$\therefore 14x^3+3x^2-3x-4=A(x^3-x)+B(x^2-1)+C(x^3+x^2)+D(x^3-x^2)$

$=(A+C+D)x^3+(B+C-D)x^2-Ax-B$

$\therefore A+C+D=14$, $B+C-D=3$, $-A=-3$, $-B=-4$

$\therefore A=3$, $B=4$, $C+D=11$, $C-D=-1$ $\therefore C=5$, $D=6$

$\therefore g(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{6}{x+1}$

$I=\int f(x)dx=\int\left(x+2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{6}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3\log|x|-\dfrac{4}{x}+5\log|x-1|+6\log|x+1|+C$

$=\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{4}{x}+\log\left|x^3(x-1)^5(x+1)^6\right|+C$

[12]　$I = \int \tan^3 x\, dx$

[解法 I]

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x\, dx$$

$t = \cos x$ とおくと．$dt = -\sin x\, dx$　∴ $\sin x\, dx = -dt$

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^3}(-dt) = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) dt = \log|t| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2} + c$$

$$= \log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + 1 \quad \text{(答)}$$

[解法 II]

$\tan x$ の有理式の積分は $t = \tan x$ とおいて置換積分すると t の有理式の積分になるという汎用性のある手法をあてはめて求めてみると

$$t = \tan x, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1+\tan^2 x) dx = (1+t^2)\, dx.$$

$$I = \int \tan^3 x\, dx = \int t^3 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)t - t}{1+t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\log|1+t^2| + c = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\log|1+\tan^2 x| + c \quad \text{(答)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{\cos^2 x}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \log|\cos x| + c' \quad \text{(答)} \quad \left(c' = c - \frac{1}{2}\right)$$

[解法 III]

$\sin x$ および $\cos x$ の有理式の積分は $t = \tan\frac{x}{2}$ とおいて置換積分すると t の有理式の積分になるという，さらに汎用性の高い手法をあてはめて求めてみると．

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$I = \int \tan^3 x\, dx = \int \frac{8t^3}{(1-t^2)^3}\cdot\frac{2}{1+t^2} dt = 16\int \frac{t^3}{(1+t^2)(1-t^2)^3} dt.$$

$u = t^2$ とおくと．$t\, dt = \frac{1}{2} du$.

$$I = 16\int \frac{u}{(1+u)(1-u)^3}\frac{du}{2} = -8\int \frac{u}{(u+1)(u-1)^3} du.$$

[12]（つづき）

部分分数分解する：

$$\frac{u}{(u+1)(u-1)^3}=\frac{\frac{1}{8}}{u+1}+\frac{A}{u-1}+\frac{B}{(u-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{(u-1)^3}$$

（$\frac{1}{8}$ は 両辺に $u+1$ を乗じて $u=-1$ を代入すると得られ，$\frac{1}{2}$ は両辺に $(u-1)^3$ を乗じて $u=1$ を代入すると得られる）

$u=0$ を代入すると　$0=\frac{1}{8}-A+B-\frac{1}{2}$　$\therefore\ A-B=-\frac{3}{8}$

$u=2$ を代入すると　$\frac{2}{3}=\frac{1}{24}+A+B+\frac{1}{2}$　$\therefore\ A+B=\frac{1}{8}$

$\therefore\ A=-\frac{1}{8}$, $B=\frac{1}{4}$

（計算チェックのため $u=-2$ を代入すると，（左辺）$=-\frac{2}{27}$，（右辺）$=-\frac{2}{27}$ となり一致するのでO.K.）

$$\therefore\ I=\int\left(-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u-1}-\frac{2}{(u-1)^2}-\frac{4}{(u-1)^3}\right)du$$

$$=-\log|u+1|+\log|u-1|+\frac{2}{u-1}+\frac{2}{(u-1)^2}+C$$

$$=\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+\frac{2u}{(u-1)^2}+C$$

$$=\log\left|\frac{t^2-1}{t^2+1}\right|+\frac{2t^2}{(t^2-1)^2}+C$$

$$=\underline{\log|\cos x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C}\quad（答）$$

$$=\log|\cos x|+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+C$$

$$=\underline{\log|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C'}\quad（答）\quad\left(C'=C-\frac{1}{2}\right)$$

受験者の答案に見られた別解法

[3] $F=\int \arcsin x\,dx$.

$t=\arcsin x$ とおくと. $x=\sin t$, $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$.

$\therefore F=\int t\,\dfrac{dx}{dt}\,dt=\int t\cos t\,dt$.

置換積分により. $F=t\sin t-\int 1\cdot\sin t\,dt=t\sin t+\cos t+c$

$t=\arcsin x$ を代入して. $F=\arcsin x\cdot\sin(\arcsin x)+\cos(\arcsin x)+c$.

ここで $\sin(\arcsin x)=x$, $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ を使うと

$F=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$ を得る.

[4] 部分積分法により. $F=\int(\arcsin x)^2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)^2(\arcsin x)'dx$

$=(\arcsin x)^2\arcsin x-\int 2(\arcsin x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x\,dx$

$=(\arcsin x)^3-2(F+c)$

$\therefore\ 3F=(\arcsin x)^3-2c\qquad\therefore\ F=\dfrac{1}{3}(\arcsin x)^3+c'$

$(c'=\frac{-2}{3}c)$

[6] $F=\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$t=1+\sqrt{x}$ とおくと $\sqrt{x}=t-1$, $x=(t-1)^2$, $\dfrac{dx}{dt}=2(t-1)$.

$F=\int\dfrac{1}{t}\dfrac{dx}{dt}dt=\int\dfrac{1}{t}2(t-1)\,dt=2\int\left(1-\dfrac{1}{t}\right)dt=2t-2\log|t|+c$

$=2(1+\sqrt{x})-2\log|1+\sqrt{x}|+c=2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x})+c'$.

$(c'=c+2)$

[12] $F=\int\tan^3x\,dx=\int\dfrac{\sin^3x}{\cos^4x}\cdot\cos x\,dx=\int\dfrac{\sin^3x}{(1-\sin^2x)^2}\cos x\,dx$.

$t=\sin x$ とおけば $dt=\cos x\,dx$ なので

$F=\int\dfrac{t^3}{(1-t^2)^2}dt$.

次に $u=1-t^2$ とおけば. $du=-2t\,dt$ なので

$F=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1-u}{u^2}du=\dfrac{1}{2u}+\dfrac{1}{2}\log|u|+C=\dfrac{1}{2(1-\sin^2x)}+\dfrac{1}{2}\log|1-\sin^2x|+C$

$=\dfrac{1}{2\cos^2x}+\dfrac{1}{2}\log(\cos^2x)+c=\dfrac{1}{2\cos^2x}+\log|\cos x|+c$.