

三角関数の有理式の不定積分の計算例

【問題】不定積分 $F(x) = \int \frac{dx}{(1 + \epsilon \cos x)^2}$ を求めよ. ただし ϵ は $-1 < \epsilon < 1$ を満たす定数とする.
(なお, これはケプラー運動の解を求める際に必要となる不定積分である.)

【解答】

[1]: 計算の主要部分

被積分関数が $\cos x$ (および $\sin x$) の有理関数である場合の定石

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \text{とおくと} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \quad (1)$$

(導出は後述の [3] で行う) に従って置換積分を実行すると,

$$F = \int \frac{1}{(1 + \epsilon \cos x)^2} \frac{dx}{dt} dt \quad (2)$$

$$= \int \frac{1}{\left(1 + \epsilon \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt \quad (3)$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{\{1+t^2 + \epsilon(1-t^2)\}^2} \frac{2}{1+t^2} dt \quad (4)$$

$$= 2 \int \frac{1+t^2}{\{1+\epsilon + (1-\epsilon)t^2\}^2} dt \quad (5)$$

$$= 2 \int \frac{1+t^2}{(1+\epsilon)^2 \left\{1 + \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} t^2\right\}^2} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t\right) \quad (6)$$

$$= \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}} \int \frac{1 + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t\right)^2}{\left\{1 + \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t\right)^2\right\}^2} d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t\right) \quad (7)$$

を得る. 更に,

$$u = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t \quad \left(= \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (8)$$

といて 2 回目の置換積分を行うと,

$$\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2} F = \int \frac{1 + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} u^2}{(1+u^2)^2} du \quad (9)$$

$$= \int \frac{1 - \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+u^2)}{(1+u^2)^2} du \quad (10)$$

$$= \int \frac{-\frac{2\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+u^2)}{(1+u^2)^2} du \quad (11)$$

$$= -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon} \int \frac{du}{(1+u^2)^2} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \int \frac{du}{1+u^2} \quad (12)$$

を得る. 右辺に現れた不定積分は,

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c_1 \quad c_1 \text{ は積分定数} \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2} \arctan u + \frac{u}{2(1+u^2)} + c_2 \quad c_2 \text{ は積分定数} \quad (14)$$

である (式 (14) は後述の [4] で導く). これらを式 (7) に代入すると,

$$\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}F = -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon} \left\{ \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan u + c_2 \right\} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \arctan u + c_1 \quad (15)$$

$$= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{1-\epsilon} \arctan u + c \quad (c = c_1 - \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}c_2 \text{ とした}) \quad (16)$$

$$= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2}}{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \tan^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{1-\epsilon} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$= -\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} + \frac{1}{1-\epsilon} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + c \quad (18)$$

を得る. 式 (18) の両辺を $\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}$ で割れば答を得たことになる.

[2]: 積分結果の単純化

本稿では更に, (後述の [5] で導く) 恒等式

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (19)$$

を利用して $\sin x$ と $\cos x$ を使って式 (18) の右辺第 1 項を表してみよう.

$$\frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = \frac{\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2 + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \quad (20)$$

$$= \frac{(1+\cos x) \sin x}{\sin^2 x + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)^2} \quad (21)$$

$$= \frac{(1+\cos x) \sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x) + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)^2} \quad (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x) \quad (22)$$

$$= \frac{\sin x}{1 - \cos x + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(1+\cos x)} \quad (23)$$

$$= \frac{1-\epsilon}{2} \cdot \frac{\sin x}{1+\epsilon \cos x} \quad (24)$$

であるから,

$$F = \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \left(-\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right) \cdot \frac{1-\epsilon}{2} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\epsilon} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + c \right\} \quad (25)$$

$$= -\frac{\epsilon}{(1-\epsilon^2)} \cdot \frac{\sin x}{1+\epsilon \cos x} + \frac{2}{(1-\epsilon^2)\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + c' \quad (c' = \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}c) \quad (26)$$

という形の答を得る. ここで c' は積分定数である.

[3]: 式 (1) の導出

公式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ の両辺を $\cos^2 x$ で割って得られる等式 $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入すると

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + t^2} \quad (27)$$

が得られる。余弦の倍角公式 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入したものと式 (27) とから、

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (28)$$

が得られる。また、正弦の倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入したものと式 (27) とから、

$$\sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \cdot t \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2} \quad (29)$$

が得られる。最後に、 $t = \tan \frac{x}{2}$ の両辺を x で微分して得られる

$$\frac{dt}{dx} = \left\{ \frac{d}{d\left(\frac{x}{2}\right)} \tan \left(\frac{x}{2}\right) \right\} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2}\right) \right\} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \quad (30)$$

および、式 (27) を使って、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2} \quad (31)$$

が得られる。

[4] : 式 (14) の導出

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int 1 \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \int (x)' \cdot \frac{1}{x^2+1} dx \quad (32)$$

$$= x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \int x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' dx \quad (\text{部分積分法}) \quad (33)$$

$$= \frac{x}{x^2+1} - \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (34)$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \quad (35)$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{(x^2+1) - 1}{(x^2+1)^2} dx \quad (36)$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \quad (37)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + c \quad (c \text{ は積分定数}) \quad (38)$$

[5] : 式 (19) の導出

正接の定義式 (に成り得る式) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入して得られる

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad (39)$$

を、正弦の倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ に $\theta = \frac{x}{2}$ を代入して得られる $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, および、余弦の半角公式 $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ を使って式変形すると、

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2} \sin x}{\frac{1}{2}(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (40)$$

が得られる。