有理関数の不定積分の計算例 No.2

【問題】　不定積分　$F(x) = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$　を求めよ.

【解答】

$\boxed{\text{ステップ 1}}$ 被積分関数の分子の多項式の次数 2 は 分母の多項式の次数 3 より小さいので, 何もせずに進む.

$\boxed{\text{ステップ 2}}$ 分母の多項式は既に 1 次式の積の形に完全に因数分解されているので, 何もせずに進む.

$\boxed{\text{ステップ 3}}$

本問題の被積分関数は, 別紙配布資料で述べたように, A, B, C を定数として,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{1}$$

の形に部分分数分解できる. 両辺に $(x-1)(x+1)^2$ を掛けると,

$$\begin{aligned} x^2+1 &= A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \qquad (2)\\ &= (A+B)x^2 + (2A+C)x + A - B - C \qquad (3) \end{aligned}$$

と成るので,

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \qquad (4)\\ 2A+C &= 0 \qquad (5)\\ A-B-C &= 1 \qquad (6) \end{aligned}$$

を満たす A, B, C の値の組を見つけることができれば, その形に変形できることを確かめたことになる. (4)+(5)+(6) より, $4A = 2$, $\therefore\ A = \frac{1}{2}$. これを (4) に代入して $B = 1 - A = \frac{1}{2}$. (5) に代入して $C = -2A = -1$. このようにして下記の部分分数分解結果を得ることができた.

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \tag{7}$$

[補足]

試験答案を採点していると, 式 (1) の右辺の 2 番目の項（係数 B の掛けられた項）に相当する項を忘れる間違いを良く見かける. そうなりそうな人は, まず「分母が n 次式の項の分子は $n-1$ 次式にする」と覚えると良い. 即ち,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B'x+C'}{(x+1)^2} \tag{8}$$

の形が, 基本的な分解方法なのである. しかし, 上式の右辺第 2 項は不定積分が即座に書き下せるような形をしていないので,

$$\frac{B'x+C'}{(x+1)^2} = \frac{B'(x+1)-B'+C'}{(x+1)^2} = \frac{B'}{x+1} + \frac{C'-B'}{(x+1)^2} \tag{9}$$

と変形し, B', C' の代わりに, $B = B'$, $C = C' - B'$ を未知数として決定することにしたのが式 (1) であるというふうに理解しておけば項を忘れることは起きにくくなるであろう.

[補足] x に値を代入することで係数（A, B, C）を求める方法は, 分母に 2 乗以上の因子が含まれる場合は, そのままでは行き詰まる. 以下ではその困難を具体的に見た上で, それを回避する工夫を呈示する. 式 (1) の両辺に $(x-1)$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = A + \frac{x-1}{x+1}B + \frac{x-1}{(x+1)^2}C \tag{10}$$

に $x=1$ を代入すると $x-1=0$ なので,

$$\frac{2}{4}=A, \quad \therefore \quad A=\frac{1}{2} \tag{11}$$

を得る. 次に, 式 (1) の両辺に $(x+1)^2$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(x+1)^2}{x-1}A+(x+1)B+C \tag{12}$$

に $x=-1$ を代入すると $x+1=0$ なので,

$$\frac{2}{-2}=C, \quad \therefore \quad C=-1 \tag{13}$$

を得る. しかし, 式 (1) の両辺に $(x+1)$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x-1}A+B+\frac{1}{x+1}C \tag{14}$$

には, $x=\pm 1$ を代入することができないので（分母がゼロになる項があるから）, A, C の値を使わずに B の値だけを求めることのできる代入操作は存在しない. これが素朴な代入法の直面する困難である.

ところが, よく考えてみると, この問題の場合は代入法で決め損ねた未知数は B ひとつだけなので, 既に求まった A,C の値を使えば B の値は求まる. 即ち,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x+1}{x-1}A-\frac{1}{x+1}C && (15)\\
&= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x+1}{2(x-1)}+\frac{1}{x+1} && (16)\\
&= \frac{x^2+1-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}+x-1}{(x-1)(x+1)} && (17)\\
&= \frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}{x^2-1} && (18)\\
&= \frac{1}{2} && (19)
\end{aligned}$$

として求まる.

更に考えてみると, このような煩瑣な文字式の計算をする必要はない. x に（どの項の分母をもゼロにしない）適当な値を代入して計算しても答は求まるのである. 例えば $x=0$ を式 (15) に代入すれば, 下記のように数値だけの簡便な計算で B の値が求まる.

$$B=\frac{0^2+1}{(0-1)(0+1)}-\frac{0+1}{0-1}A-\frac{1}{0+1}C=-1+A-C=-1+\tfrac{1}{2}-(-1)=\tfrac{1}{2} \tag{20}$$

決め損ねた未知数が 2 個ある場合も, x の値として 2 つの数を使えば, 2 個の未知数についての連立方程式が得られるので, それを解いて未知数を決めればよい. 連立方程式を解く手間は生じるが, 文字式の煩瑣な計算と比較すれば, 十分に楽である.

$\boxed{\text{ステップ 4}}$

部分分数分解後の各項を積分すると,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2} && (21)\\
&= \tfrac{1}{2}\log|x-1|+\tfrac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{x+1}+c && (22)\\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|+\frac{1}{x-1}+c && (23)
\end{aligned}$$

を得る. ただし c は積分定数である.

$\boxed{\text{ステップ 5}}$

計算ミスの可能性があるため, 積分結果を微分して被積分関数に一致することを確認することが望ましい.

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} \quad \text{（一致）} \tag{24}$$