有理関数の不定積分の計算例 No.1

【問題】　不定積分　$F(x) = \displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$　を求めよ.

【解答】

n を自然数とし, c_i $(i=1,\cdots,n)$ を実数の定数として, 変数 x の n 次の多項式とは, $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ の形の数式のことである. そして, 有理関数（有理式）とは, $\dfrac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数（数式）のことである. 任意の有理関数の不定積分は, 以下の計算例で述べるような手順に従えば, 必ず求めることができる.

[補足]「多項式」は polynomial の訳語だが,「整式」と訳す流儀もある.

なお,「整式」という訳語は「有理数は整数を整数で割ったものである」という言い回しに類似した「有理式は整式を整式で割ったものである」という言い回しができる観点からは整合性が良い命名だが,「係数が整数の場合が整式だ」という誤解をされるのが心配である. 一方,「多項式」という訳語にも「項を沢山含む数式を多項式と言うのだろう. 三角関数だろうが平方根だろうがどんな形の関数の項を含んでいても, 複数の項の和は全て多項式と呼んで良いはすだ」という乱暴な誤解をされる心配がある.

ステップ 1

被積分関数の分子の多項式の次数は 4, 分母の多項式の次数は 3 である. このように,（分子の次数）≧（分母の次数）のときは, まず, 多項式の割り算を行って, 被積分関数を（分子の次数）<（分母の次数）に変える.

そのためには, 下記のように, 多項式の「積み算」の形で求めれば, 計算間違いが少ないだろう.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x & -1 & & & \\ \cline{2-6}
x^3+x^2+x+1 & x^4 & & +x^2 & & +1 \\
 & x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & & -x & +1 \\
 & & -x^3 & -x^2 & -x & -1 \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & & +2
\end{array}
\tag{1}
$$

この積み算の計算結果から, 下記の等式を得る.

$$
\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1} = x-1+\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}
\tag{2}
$$

[補足] もし分母や分子が因数分解した形で与えられたときは, それぞれを展開してから, 積み算をせよ.

[補足] 多項式の積み算を, 下記のように, x^n を略して数字だけを書くことで省力化する流儀を好む人もあるだろう.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & & 1 & -1 \\ \cline{2-6}
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \cline{2-6}
 & & -1 & 0 & -1 & 1 \\
 & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \cline{3-6}
 & & & 1 & 0 & 2
\end{array}
\tag{3}
$$

これは, 桁上がりのない積み算と捉えることができる. 小学校で習う 10 進数の積み算では, 1 つの桁に入る数字は 0〜9 の整数に制限されており, 計算中に或る桁の数字が 10 以上や負になれば上位の桁の数字を修正することで 0〜9 の範囲に納めるという規則が計算手続きの面倒な部分だったが, 多項式の積み算では, 1 つの桁に入れてよい数字は $-\infty$ から $+\infty$ までの全実数なので, ある桁での計算が他の桁に影響を及ぼすという面倒なことはしなくて良い.

ステップ 2

一般に, 実係数の（即ち, 係数が実数の）多項式は, 何個かの（実係数の）1 次式, および, 何個かの判別式が負の（実係数の）2 次式の積の形に因数分解できるという定理が成り立つ. ステップ 2 では分母の多項式をこの形になるまで完全に因数分解する.

変数 x に或る値 a を代入すると多項式の値がゼロになるなら, その多項式は $(x-a)$ で割り切れる（$(x-a)$ を因子に持つとも言う）. 本問題の場合は, 分母の多項式 x^3+x^2+x+1 に $x=-1$ を代入すると,

$$x^3+x^2+x+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0 \tag{4}$$

なので, 分母の多項式は $(x+1)$ を因子に持つ. 実際, 下式の通りである.

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1) \tag{5}$$

[補足] 式 (5) の計算は, 途中で計算間違いをすると, 割り切れるはずのものが（ほとんどの場合は）割り切れなくなって計算間違いをしたと分かるので, 手間をかけて（確実性のより高い）多項式の積み算をする必要性は小さいだろう.

x^2+1 は判別式の値 $(=-4)$ が負なので (言い換えると, $x^2+1\geq 1>0$ ゆえに $x^2+1=0$ を満たす実数が存在しないので), 実係数の範囲ではこれ以上因数分解できないから, 式 (5) でこのステップの目的を達したことになる.

ステップ 3

被積分関数の有理式の部分を部分分数分解（教科書での呼称は部分分数 展開）する.

本問題の場合は, 別紙配布資料で述べたように, A, B, C を定数として,

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{6}$$

の形に部分分数分解という名の式変形ができる. 両辺に $(x+1)(x^2+1)$ を掛けると,

$$\begin{aligned} x^2+2 &= A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1) \quad (7)\\ &= (A+B)x^2+(B+C)x+A+C \quad (8) \end{aligned}$$

と成るので,

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \quad (9)\\ B+C &= 0 \quad (10)\\ A+C &= 2 \quad (11) \end{aligned}$$

を満たす A, B, C の値の組を見つけることができれば, その形に変形できることを確かめたことになる. (9)−(10)+(11) より, $2A=3$, $\therefore\ A=\frac{3}{2}$. これを (9) に代入して $B=1-A=-\frac{1}{2}$. (10) に代入して $C=2-A=\frac{1}{2}$. このようにして下記の部分分数分解結果を得ることができた.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} \tag{12}$$

[補足] 係数 A, B, C の別の求め方として, 値を代入して決める方法がある. 式 (6) の両辺に $(x+1)$ を掛けたもの

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = A + \frac{(x+1)(Bx+C)}{x^2+1} \tag{13}$$

に $x=-1$ を代入すると $x+1=0$ なので,

$$\frac{3}{2} = A \tag{14}$$

を得る. 次に, 式 (6) の両辺に (x^2+1) を掛けたもの

$$\frac{x^2+2}{x+1} = \frac{A(x^2+1)}{x+1} + Bx + C \tag{15}$$

に $x=i$ (i は虚数単位, $i^2=-1$) を代入すると $x^2+1=0$ なので,

$$\frac{1}{i+1} = Bi + C \tag{16}$$

を得る.

$$\frac{1}{i+1} = \frac{-i+1}{(-i+1)(i+1)} = \frac{-i+1}{1^2-i^2} = \frac{-i+1}{1-(-1)} = \frac{-i+1}{2} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)i + \tfrac{1}{2} \tag{17}$$

なので, 式 (16) の右辺と見較べることで, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$ を得ることができる.

$\boxed{\text{ステップ 4}}$

部分分数分解後の各項を積分すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left\{ x - 1 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \right\} dx && (18)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}I_1 + \tfrac{1}{2}I_2 && (19) \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c_1 \tag{20}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c_2 \tag{21}$$

となる. 即ち, 答は,

$$\begin{aligned} F(x) = &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\log(x^2+1)+c_1\right) + \tfrac{1}{2}(\arctan x + c_2) && (22)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{3}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{4}\log(x^2+1) + \tfrac{1}{2}\arctan x + c && (23) \end{aligned}$$

である. ただし c $(=-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2)$ は積分定数である.

$\boxed{\text{ステップ 5}}$

計算ミスをしたかもしれないので, 積分結果を微分して, 問題の積分の被積分関数に一致することを確認するのが望ましい.

$$\begin{aligned} F'(x) &= x - 1 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} && (24)\\ &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1) + \frac{3}{2}(x^2+1) - \frac{1}{4}\cdot 2x(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} && (25)\\ &= \frac{x^4 - 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{(x+1)(x^2+1)} && (26)\\ &= \frac{x^4+x^2+1}{(x+1)(x^2+1)} \quad \text{（一致した）} && (27) \end{aligned}$$