$\boxed{1}$ 次の不定積分と定積分を求めよ.（各 10 点）

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^e x^3 \log x\,dx$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　名	得　点
微分積分　(期末)	2/2/10	小野田・林 田嶋・保倉			/30

$\boxed{2}$ 次の広義積分の値を求めよ.（各 10 点）

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\,dx$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　　名	得　点
微分積分　(期末)	2/2/10	小野田・林 田嶋・保倉			/20

$\boxed{3}$ 次の 2 重積分の値を求めよ.（各 10 点）

(1) $\displaystyle\iint_D (x+3y)\ dxdy \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x-y}\ dxdy \qquad D: x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ x+y \leqq 1$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\ dxdy \qquad D: x^2+y^2 \leqq 1$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　　　　名	得　点
微分積分　(期末)	2/2/10	小野田・林 田嶋・保倉			/30

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ.（各 10 点）

(1) 置換 $t = \sqrt{1-x^2}$ を利用して，次の定積分 I の値を求めよ.

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x^4)\sqrt{1-x^2}\, dx$$

(2) 積分順序の変更を利用して，次の累次積分を求めよ.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\, dx$$

科目名	試験日	出題者	学科・学籍番号	氏　　　名	得　点
微分積分　(期末)	2/2/10	小野田・林 田嶋・保倉			/20

1 (1) $I=\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}dx$. $t=\sqrt[3]{x}$ とおくと、$x=t^3$, $dx=3t^2dt$.

$I=\int \frac{t^3+1}{t}3t^2dt = \int(3t^4+3t)dt = \frac{3}{5}t^5+\frac{3}{2}t^2+C = \frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{3}{2}x^{2/3}+C$

$= \frac{\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{2}x}{\sqrt[3]{x}}+C = \frac{3x(2x+5)}{10\sqrt[3]{x}}+C$

(2) $I=\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}dx$. $t=\cos x$ とおくと. $dt=-\sin x\,dx$.

$I=-\int\frac{t}{1+t}dt = -\int\frac{(1+t)-1}{1+t}dt = \int\left(\frac{1}{1+t}-1\right)dt$

$=\log|1+t|-t+C = \log(1+\cos x)-\cos x+C = 2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\cos x+C$

(3) $I=\int_1^e x^3\log x\,dx = \int_1^e\left(\frac{1}{4}x^4\right)'\log x\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4\log x\right]_1^e - \int_1^e\frac{1}{4}x^4(\log x)'dx$ (∵ 部分積分法)

$=\left[\frac{1}{4}x^4\log x\right]_1^e - \int_1^e\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx$ (∵ $(\log x)'=\frac{1}{x}$)

$=\left[\frac{1}{4}x^4\log x\right]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4\log x\right]_1^e - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^e$

$=\left[\frac{1}{4}x^4\left(\log x-\frac{1}{4}\right)\right]_1^e$

$=\frac{1}{4}e^4\left(\log e-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\cdot1^4\cdot\left(\log 1-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}$ (∵ $\log e=1$, $\log 1=0$)

$=\frac{3e^4+1}{16}$

なお 不定積分は.

$\int x^3\log x\,dx = \frac{1}{4}x^4\left(\log x-\frac{1}{4}\right)+C$ である。(不定積分が求まっていれば8点.)

(補足) (1) の 最も易しい求め方は

$I=\int\frac{x+1}{x^{1/3}}dx=\int(x^{2/3}+x^{-1/3})dx=\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{3}{2}x^{2/3}+C$.

であろう。しかし. 冒頭に示した置換 $t=\sqrt[3]{x}$ で求めた答案が多かった。これも又、自然な解法である. 実は部分積分で求めた答案も2枚あった。これはまわりくどい解法である。

(2) の $\int\frac{t}{1+t}dt$ についても 部分積分で求めた答案が1枚あった。まわりくどいが、部分積分をしっかりと練習してきたことが良くわかる答案ではありました.

$\boxed{2}$ (1) $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$. $t=1-x$ とおくと, $dx=-dt$, $x=0\to1$ は $t=1\to0$ に対応する。 ∴ $I=\int_1^0 \frac{1-t}{\sqrt{t}}(-dt) = \int_0^1 (t^{-1/2}-t^{1/2})dt$

$= \left[2t^{1/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{t=0}^{t=1} = 2-\frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{3}}$

$\boxed{\text{別解}}$(広義積分を狭義の積分の極限として陽に表す場合)

$I_b = \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ $(0<b<1)$ とおくと. $\lim_{b\to1-0} I_b$ をもって $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ の正確な定義とする。

$I_b = \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx \overset{\text{(途中省略)}}{=} \cdots\cdots = \left[2t^{1/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{t=0}^{t=b} = 2b^{1/2}-\frac{2}{3}b^{3/2}$.

$I = \lim_{b\to1-0} I_b = \lim_{b\to1-0}\left(2b^{1/2}-\frac{2}{3}b^{3/2}\right) = 2-\frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{3}}$.

(2) $I=\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}dx$.

$F(x)=\int\frac{x}{(x+1)^2(x+2)}dx$ (不定積分) とおくと. 被積分関数は $0\leqq x<\infty$ で連続なので ($\because$ $-\infty<x<\infty$ にある不連続点は $x=-1$ と $x=-2$ のみ) 微分積分学の基本定理により. $I=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(0)$ が成立する。 まず $F(x)$ を求める。

$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}$ (A, B, C は定数) とおける。

$x = A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2$

$= (A+C)x^2+(3A+B+2C)x+2A+2B+C$

∴ $A+C=0$, $3A+B+2C=1$, $2A+2B+C=0$

∴ $A=2$, $B=-1$, $C=-2$

$F(x)=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$= 2\log|x+1|+\frac{1}{x+1}-2\log|x+2|+C$

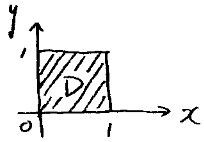
$= 2\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+\frac{1}{x+1}+C$

$\lim_{x\to\infty}F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2\log\left|\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right|+\frac{1}{x+1}+C\right) = 2\log1+0+C = C$

$F(0) = 2\log\frac{1}{2}+1+C = -2\log2+1+C$

$I = \lim_{x\to\infty}F(x)-F(0) = C-(-2\log2+1+C) = \underline{2\log2-1}$

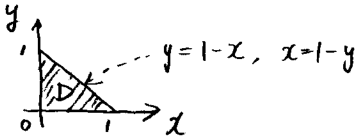
$\boxed{3}$ (1) $I = \iint_D (x+3y)\,dx\,dy$



$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\,(x+3y) = \int_0^1 dx\left[xy + \frac{3}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \underline{2}$$

(2) $I = \iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$

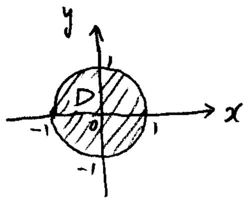


$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\; e^{x-y} = \int_0^1 dx\; e^x \left[-e^{-y}\right]_{y=0}^{y=1-x}$$

$$= \int_0^1 dx\; e^x\left(1 - e^{x-1}\right) = \int_0^1 \left(e^x - e^{2x-1}\right)dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= e^1 - \frac{1}{2}e^1 - e^0 + \frac{1}{2}e^{-1} = \underline{\frac{1}{2}e - 1 + \frac{1}{2e}} = \underline{\frac{(e-1)^2}{2e}}$$

(3) $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx\,dy$



2次元極座標に変数変換すると

$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$

$dx\,dy = \underline{r}\,dr\,d\theta$ ← ヤコビアン

$$I = \int_0^1 dr\cdot r\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{1}{\sqrt{r^2+1}} = \left\{\int_0^{2\pi} d\theta\right\}\left\{\int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+1}}\right\}$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{r^2+1}\right]_{r=0}^{r=1} = \underline{2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

(補足) デカルト座標のまま累次積分で表すと下式になる.

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$ ----- 4点を与えた。

しかし.この後の不定積分を求めるのがわずらわしい計算になる。

2次元極座標に変数変換することの有難さがそこにある。

$\boxed{4}$ (1) $t = \sqrt{1-x^2}$ とおくと、$x^2 = 1-t^2$．積分範囲$(0 \leqq x \leqq 1)$では $x = \sqrt{1-t^2}$.

$\therefore\ dx = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.　　また $x=0 \to 1$ は $t = 1 \to 0$ に対応する

$$I = \int_0^1 (x^2-2x^4)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 x^2(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \int_1^0 (1-t^2)\{1-2(1-t^2)\}\,t\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

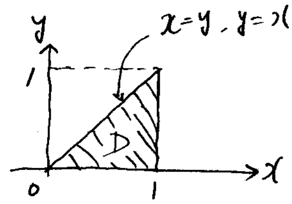
$$= \int_0^1 (1-t^2)(2t^2-1)\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= -\int_0^1 t^2(1-2t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= -I$$

$\therefore\quad I = -I \qquad \therefore\quad 2I = 0 \qquad \therefore\quad I = \underline{0}$

(2) $$I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}dx = \iint_D e^{-x^2}\,dx\,dy$$



$$= \int_0^1 dx \int_0^x dy\ e^{-x^2}$$

$$= \int_0^1 dx \cdot e^{-x^2}\,[y]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2}(e^{-1}-e^0) = \underline{\frac{1-\frac{1}{e}}{2}}$$

(2)の別解：積分順序を変更しないで求める．

$F(x) = \int e^{-x^2}dx$ とおく．$F'(x) = e^{-x^2}$ である．

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 dy\,[F(x)]_{x=y}^{x=1} = \int_0^1 \{F(1)-F(y)\}\,dy$$

$$= [F(1)\,y]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 F(y)\,dy = F(1) - \int_0^1 1\cdot F(y)\,dy$$

$$= F(1) - \int_0^1 y'\,F(y)\,dy = F(1) - [y\,F(y)]_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 y\,F'(y)\,dy$$

$$= F(1) - 1\cdot F(1) + 0\cdot F(0) + \int_0^1 y\,e^{-y^2}dy$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{e^0-e^{-1}}{2} = \underline{\frac{1-\frac{1}{e}}{2}}$$

$\boxed{4}$ (1) の 別解 (その1)

セオリーどおり、

$x = \sin t$ とおくと $t = 0 \to \frac{\pi}{2}$ は $x = 0 \to 1$ に対応する。また $dx = \cos t\, dt$.

$\sqrt{1-x^2} = \cos t$.

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x^4)\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,(1 - 2\sin^2 t)\,\cos t\ \cos t\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,(1 - 2\sin^2 t)(1 - \sin^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - 3\sin^4 t + 2\sin^6 t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$\left(\because \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}\ (n = 0, 2, 4, 6 \cdots)\right.$ 教科書 p.85 で導出済みの積分公式.$\left.\right)$

$$= \underline{0}$$

(1) の 別解 (その2)

セオリーどおり.

$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ とおくと、 $x = 0 \to 1$ は $t = 1 \to 0$ に対応し、また

$t^2 = \frac{1-x}{1+x}$, $(t^2+1)x = 1 - t^2$ $\therefore\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)^2}{1+x}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,(1+x) = t\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\therefore\ I = \int_0^1 x^2(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \int_1^0 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \left\{1 - 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\right\} \frac{2t}{1+t^2}\,\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\, dt$$

$$= 8\int_0^1 \frac{t^2(1-t^2)^2(-1+6t^2-t^4)}{(1+t^2)^7}\, dt$$

これは有理式の積分なので部分分数分解すれば不定積分は求まる.
しかし非常に手間がかかるので、ここで断念して他の方法を試すのが
賢明である。以下は数式処理ソフトを使っての結果である。参考のため記す.

$$I = 8\left[\frac{t^3(-1+t^2)^3}{3(1+t^2)^6}\right]_{t=0}^{t=1} = 3\cdot(0-0) = \underline{0}$$

t を x で表せば もとの 積分が 不定積分としても求まる:

$$\int (x^2 - 2x^4)\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{3}x^3(1-x^2)^{3/2} + C.$$