【全般的注意事項】解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。また、積分定数として断り書きなしに c、c'、c'' 等の記号を用いてよい。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記していたが、答案では arc··· の形で書け。

【1】8 点 不定積分 $\displaystyle\int xe^x\,dx$ を求めよ.

【2】8 点 不定積分 $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ を求めよ.

【3】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ.

【4】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を求めよ.

【5】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ を求めよ.

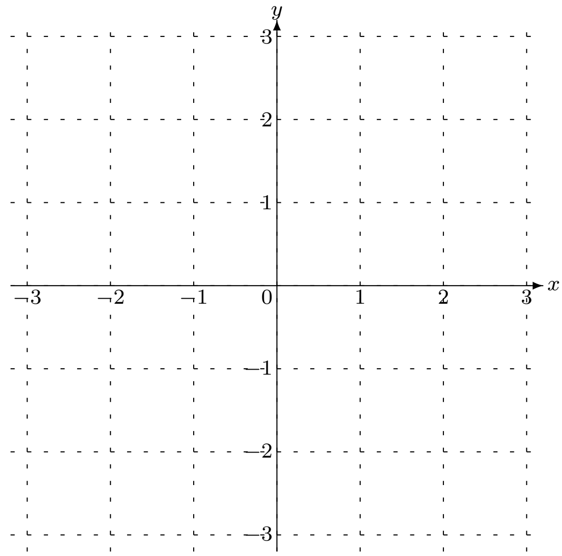
【6】8 点 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x^2}$ を求めよ.

学科		学籍番号									氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	本頁小計	全頁合計

【7】 8 点 $g(x) = \displaystyle\int_{-2x}^{2x} f(t)dt$ とするとき $\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ.

【8】 8 点 広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在する（有限の値を持つ）のは、実数の定数 α の値がどのような範囲にあるときかを論ぜよ。また、α の値がその範囲にあるときの積分値 I_α を求めよ。

【9】 8 点 極座標表示された曲線 $r = 1 + \sin\theta$ のグラフを描け。



【10】 8 点 曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)$ の $1 \le x \le 2$ に対応する部分の長さ L を求めよ。

学科	学籍番号	氏名	得点 [7]	[8]	[9]	[10]	本頁小計

【11】 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+4}{x(x+1)(x+2)}\,dx$ を求めよ.
10 点

学科		学籍番号		氏名		得点	[11]

【12】 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ を $t=\sqrt{x^2+2}-x$ とおいて置換積分することで求めよ。
10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	[12]

【微分積分Ⅱ(C1) 中間試験 解答・解説 (2009年12月22日実施分)】

[1] $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx \underset{\uparrow}{=} x e^x - \int x' e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

部分積分法

$= x e^x - e^x + c$

$= (x-1) e^x + c$ (答)

[2] $I = \int x e^{x^2} dx$ (注意: e^{x^2} は $e^{(x^2)}$ の意味で書いており $(e^x)^2$ ではない。なお $(e^x)^2 = e^{2x}$ $(= e^{(2x)})$ である。)

前問に似ているが、これは部分積分法でなく、置換積分法で求める。

$t = x^2$ とおくと $dt = 2x dx$ $\therefore x dx = \frac{1}{2} dt$.

よって $I = \int e^{x^2} \cdot x dx = \int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$ (答)

[3] $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = \int (x)' \log x \, dx \underset{\uparrow}{=} x \log x - \int x (\log x)' dx$

部分積分法

$= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + c = x(\log x - 1) + c$ (答)

[4] $I = \int \frac{\log x}{x} dx$.

前問は部分積分法を使ったが、本問では置換積分法を使う.

$t = \log x$ とおくと $dt = \frac{1}{x} dx$.

よって、$I = \int \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + c = \frac{1}{2} (\log x)^2 + c$ (答)

⤷ 下の[注意]参照.

[5] $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}$ なので $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ とおいてみると.

$dx = \sqrt{3} dt$ なので $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \underset{\uparrow}{=} \arcsin t + c$

積分公式として覚えておく

$\therefore I = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$ (答)

[6] $I = \int \frac{dx}{1 + 2x^2} = \int \frac{dx}{1 + (\sqrt{2} x)^2}$ なので $t = \sqrt{2} x$ とおいてみると

$dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dt$ なので $I = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{1+t^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + c$

積分公式として覚えておく

$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} x + c$ (答)

[注意] カッコを略した $\log x^2$ は $\log (x^2)$ の意味である.(なお $\log (x^2) = 2 \log x$ である)
また $\log^2 x$ という書き方は一般的ではない。(このような書き方は三角関数や双曲線関数にのみ使用可能と考えよ。) したがって $(\log x)^2$ と書くべきである。

[7] $F(t) = \int f(t)\,dt$ とおくと. $g(x) = \int_{-2x}^{2x} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=-2x}^{t=2x}$

$= F(2x) - F(-2x)$. $\therefore \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} F(2x) - \frac{d}{dx} F(-2x)$.

$t = 2x$ とおくと $\frac{d}{dx} F(2x) = \left\{\frac{d}{dt} F(t)\right\} \cdot \frac{dt}{dx} = f(t) \cdot 2 = 2f(2x)$.

$t = -2x$ とおくと $\frac{d}{dx} F(-2x) = \left\{\frac{d}{dt} F(t)\right\} \cdot \frac{dt}{dx} = f(t) \cdot (-2) = -2f(-2x)$.

$\therefore \frac{d}{dx} g(x) = 2f(2x) - (-2)f(-2x) = 2\{f(2x) + f(-2x)\}$ (答)

[8] $I_\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx$

$\alpha = 1$ のとき $I_\alpha = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \Big[\log x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\log 1}} - \log \varepsilon) = \infty$.

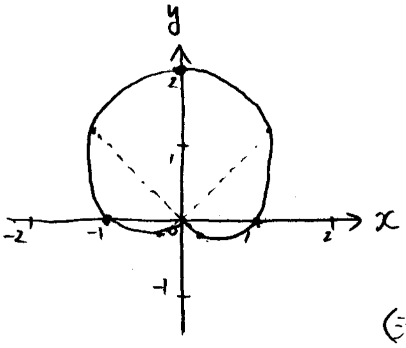
$\alpha \neq 1$ のとき $I_\alpha = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to +0} (1 - \varepsilon^{1-\alpha})$

$\alpha < 1$ ならば $1-\alpha < 0$ なので $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$ となり. $I_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}$ となる

$\alpha < 1$ ならば $1-\alpha < 0$ なので $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-\alpha} = \infty$ となり. $I_\alpha = \frac{-\infty}{1-\alpha} = \infty$ となる

したがって. I_α が存在するのは $\alpha < 1$ のときで. このとき $I_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}$ である.

[9]



$$\begin{cases} \theta = 0, \pi \text{ で } r = 1, \\ \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \text{ で } r = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \fallingdotseq 1.707 > \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で } r = 2 \\ \theta = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \text{ で } r = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \fallingdotseq 0.3 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で } r = 0 \quad (\theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ で } r > 0) \end{cases}$$

(注意) 授業でとりあげた $r = 1 + \cos\theta$ を原点のまわりに左に90°回転させた形である。(カルディオイド)

[10] $L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right)^2}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \int_1^2 \sqrt{12 + \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \int_1^2 \sqrt{(3x^2)^2 + 6 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \int_1^2 \sqrt{\left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \left[x^3 - \frac{1}{x}\right]_1^2$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \left\{8 - \frac{1}{2} - (1 - 1)\right\}$

$= \frac{15}{2\sqrt{12}} = \frac{5}{4}\sqrt{3}$ (答)

[11] 問. $I = \int \frac{7x+4}{x(x+1)(x+2)} dx$ を求めよ.

答 $\frac{7x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ とおける.

$$7x+4 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$
$$7x+4 = (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A$$

$$\therefore \begin{cases} A+B+C = 0 \\ 3A+2B+C = 7 \\ 2A = 4 \end{cases} \qquad \therefore \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -5 \end{array}$$

$$\therefore I = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\log|x| + 3\log|x+1| - 5\log|x+2| + C \quad (答)$$
$$= \log\left|\frac{x^2(x+1)^3}{(x+2)^5}\right| + C \quad (答)$$

[12] 問. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ を. $t = \sqrt{x^2+2} - x$ と置換積分して求めよ。

答 $\sqrt{x^2+2} = t + x$

$$x^2+2 = (t+x)^2 = t^2+2tx+x^2$$
$$x = \frac{2-t^2}{2t}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t \cdot 2t - (2-t^2)\cdot 2}{(2t)^2} = \frac{-4t^2 - 4 + 2t^2}{(2t)^2} = -\frac{t^2+2}{2t^2}$$
$$\sqrt{x^2+2} = t + x = t + \frac{2-t^2}{2t} = \frac{2t^2+2-t^2}{2t} = \frac{t^2+2}{2t}$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \frac{dx}{dt} dt$$
$$= \int \frac{2t}{t^2+2}\left(-\frac{t^2+2}{2t^2}\right) dt$$
$$= -\int \frac{1}{t} dt$$
$$= -\log|t| + C$$
$$= -\log\left(\sqrt{x^2+2} - x\right) + C \quad (答)$$

(任意の x に対し $t>0$ なので絶対値を丸カッコに変えた。)

$$= \log \frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x} + C$$
$$= \log \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{(\sqrt{x^2+2} - x)(\sqrt{x^2+2} + x)} + C$$
$$= \log \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{2} + C$$
$$= \log\left(\sqrt{x^2+2} + x\right) + C' \quad (C' = C - \log 2) \quad (答)$$