微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全 4 枚中の第 1 枚目)

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・小野田・林,　2009 年 2 月 3 日 1 限実施

$\boxed{1}$ 下記の小問 (1)～(3) に示した不定積分を求めよ。(10 点× 3 問=30 点)

(1) $I = \displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(2) $I = \displaystyle\int x e^{-x} \, dx$

(3) $I = \displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)} dx$

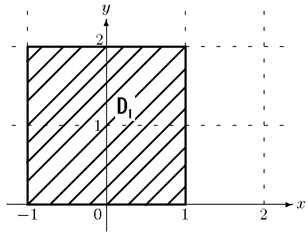
科目名: 微分積分 II (定期試験)	試験日: 平成 21 年 2 月 3 日	出題者: 田嶋・保倉 小野田・林	学 科	学籍番号								氏 名	(第 1 枚目) 得 点　/30

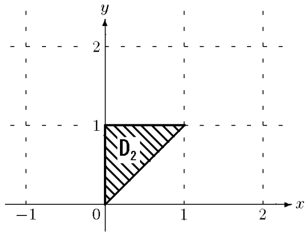
$\boxed{2}$ 図示した領域 D_1〜D_3 について、下記の小問 (1)〜(3) に示した 2 重積分の値を求めよ。（10 点× 3 問=30 点）

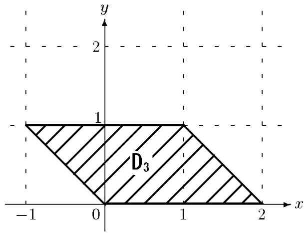
(1) $I = \iint_{D_1} x^2 y^5 dxdy$

(2) $I = \iint_{D_2} x^2 y^4 dxdy$

(3) $I = \iint_{D_3} x^2 y^3 dxdy$





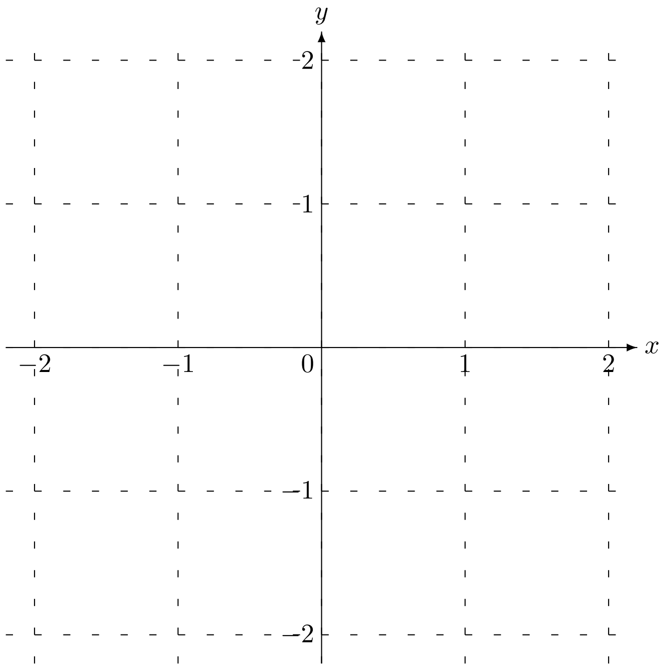


微分積分 II　定期試験　問題・答案用紙　（全 4 枚中の第 3 枚目）

福井大学工学部 電気・情報・物理・知能 工学科 1 年生対象, 担当教員 田嶋・保倉・小野田・林,　2009 年 2 月 3 日 1 限実施

$\boxed{3}$ 以下の小問 (1),(2) に与えた等式が任意の $f(x,y)$ に対して成立するとして, 領域 D_1, D_2 を図示し、また, $\boxed{?}$に適切な数式を入れて右辺を完成させよ。(10 点× 2 問=20 点)

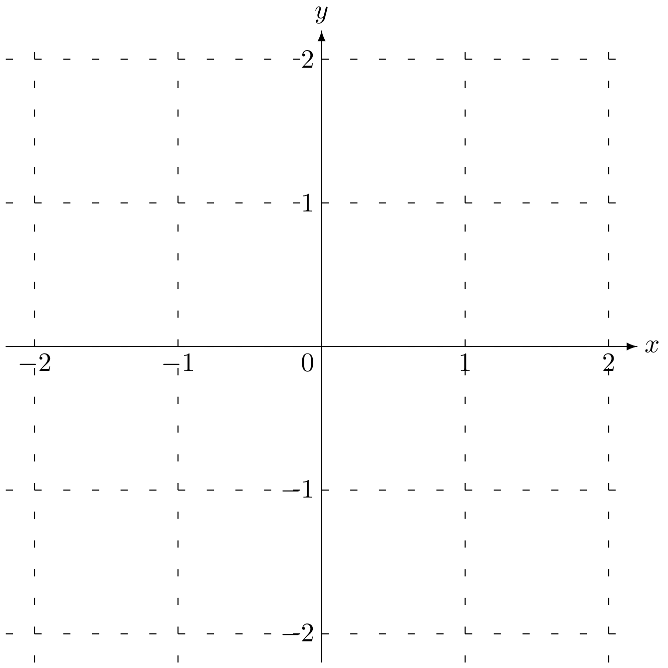
(1) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}_1} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} f(x,y)dy = \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)dx$



領域 D_1

(右辺)= $\displaystyle\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)dx$

(2) $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}_2} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_{2x}^{x+1} f(x,y)dy = \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} dy \int_{\boxed{?}}^{\boxed{?}} f(x,y)dx$



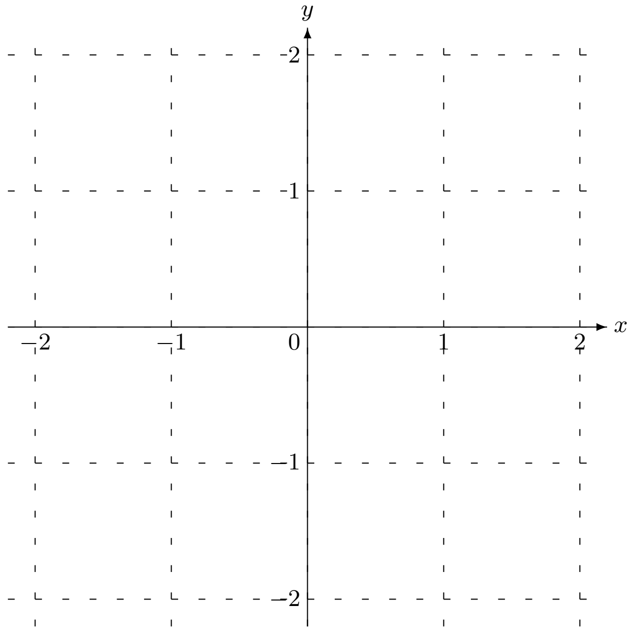
領域 D_2

(右辺)= $\displaystyle\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)dx$

$\boxed{4}$ 曲線 C は極座標で $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と表される曲線である。また、領域 D は曲線 C の囲む領域である。このとき下記の小問 (1)〜(3) に答えよ。(5 点+5 点+10 点=20 点)

(1) 曲線 C の概形を右のグラフに描け。

(2) 領域 D の面積 S を求めよ。



(1) の答

(3) 2 重積分 $I = \iint_{\mathrm{D}} x\,dxdy$ の値を求めよ。

【解答・解説】 (2009/2/3実施 微分積分II 定期試験)

[1] (1) $I = \int \sin^3 x \cos x\, dx$

$t = \sin x$ とおくと、 $dt = \cos x\, dx$

$\therefore I = \int t^3\, dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$ (答)

(2) $I = \int x e^{-x} dx$

$= \int x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) - \int x'(-e^{-x}) dx$

$= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$= -(x+1)e^{-x} + C$ (答)

(3) $I = \int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{x^2+1+2x}{x(x^2+1)} dx$

$= \int \left\{ \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} + \frac{2x}{x(x^2+1)} \right\} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$

$= \log|x| + 2\arctan x + C$ (答)

(別解)

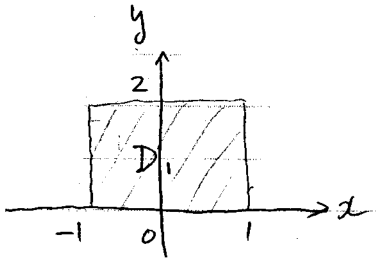
$\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと

$x^2+2x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$

$\therefore$ $A+B=1$, $C=2$, $A=1$ $\quad\therefore B=0$

$\therefore I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$ 以下上記と同じ。

[2] (1) $I = \iint_{D_1} x^2 y^5 \, dx\,dy$

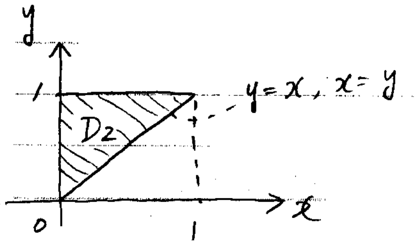


(解答)

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 dy \; x^2 y^5$$
$$= \left\{ \int_{-1}^{1} x^2 dx \right\} \left\{ \int_0^2 y^5 dy \right\}$$
$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \cdot \left[\frac{1}{6} y^6 \right]_{y=0}^{y=2}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{6}$$
$$= \frac{64}{9} \quad (答)$$

[2] (2)

$I = \iint_{D_2} x^2 y^4 \, dx\,dy$



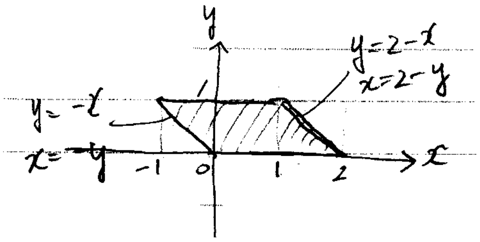
解答 1.

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \; x^2 y^4$$
$$= \int_0^1 dx \cdot x^2 \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_{y=x}^{y=1}$$
$$= \int_0^1 dx \cdot x^2 \cdot \frac{1}{5} (1 - x^5)$$
$$= \frac{1}{5} \int_0^1 (x^2 - x^7) \, dx$$
$$= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{8} x^8 \right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right)$$
$$= \frac{1}{24} \quad (答)$$

解答 2.

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y dx \cdot x^2 y^4$$
$$= \int_0^1 dy \cdot y^4 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=y}$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y^7 \, dy$$
$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{8} y^8 \right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{24} \quad (答)$$

[2] (3) $I = \iint_{D_3} x^2 y^3 \, dx\, dy$



解1.

$$I = \int_0^1 dy \int_{-y}^{2-y} dx \cdot x^2 y^3$$

$$= \int_0^1 dy \cdot y^3 \ \frac{1}{3}\left\{(2-y)^3 - (-y)^3\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 dy \cdot y^3 \left(8 - 12y + 6y^2 - y^3 + y^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(8y^3 - 12y^4 + 6y^5\right) dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}} - \frac{12}{5} + \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{6}_{1}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \ \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

解2

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} dy \ x^2 y^3$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \cdot x^2 \ \frac{1}{4}\left(1 - x^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} \left(x^2 - x^6\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{21} = \frac{1}{21}$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \ x^2 y^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$I_3 = \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \ x^2 y^3$$

$$= \int_1^2 dx \cdot x^2 \ \frac{1}{4}(2-x)^4$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 x^2 (2-x)^4 \, dx$$

$u = 2 - x$ とおくと

$$I_3 = \frac{1}{4}\int_0^1 (2-u)^2 u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(4u^4 - 4u^5 + u^6\right) du$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5} - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} + \frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{28} = \frac{84 - 70 + 15}{420}$$

$$= \frac{29}{420}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{1}{12} + \frac{29}{420}$$

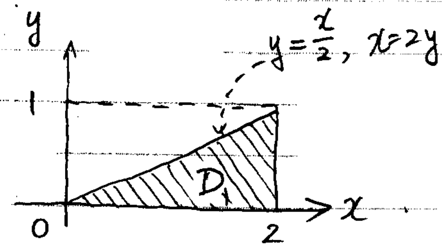
$$= \frac{20 + 35 + 29}{420}$$

$$= \frac{84}{420}$$

$$= \frac{1}{5}$$

[3] (1) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{x/2} f(x,y)\,dy = \int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ア}} dy \int_{\boxed{エ}}^{\boxed{ウ}} f(x,y)\,dx$

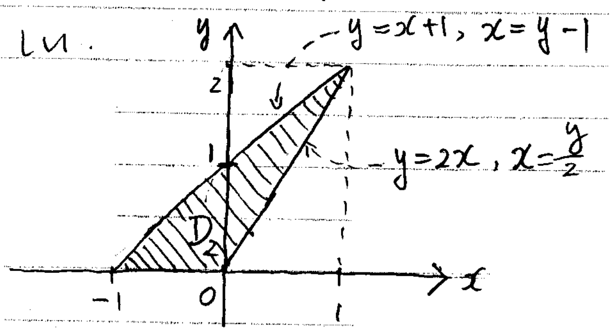
答. 下図に示したように領域Dをとると、左辺は$I=\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$に等しい



図より　$I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_{2y}^1 f(x,y)\,dx$　としても計算できることがわかる。

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_{2x}^{x+1} f(x,y)\,dy = \int_{\boxed{カ}}^{\boxed{オ}} dy \int_{\boxed{ク}}^{\boxed{キ}} f(x,y)\,dx$

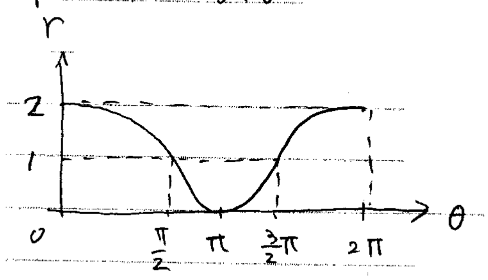
答. 下図に示したとおり領域Dをとると、左辺は2重積分 $I=\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$ に等しい。



この2重積分を外側の積分変数をy、内側の積分変数をxとする累次積分で表すと、図より。

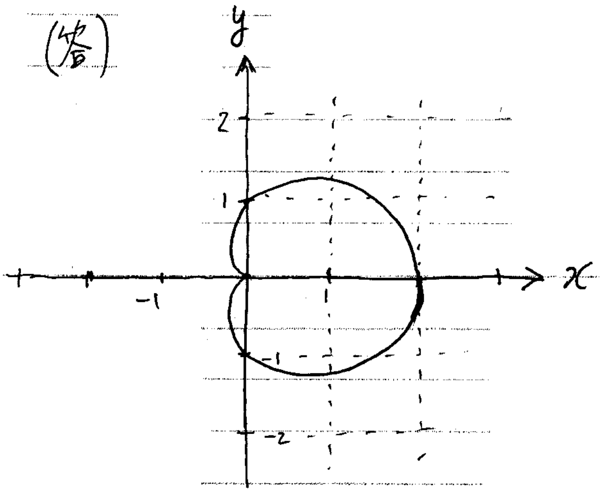
$$I = \int_0^2 dy \int_{y-1}^{y/2} f(x,y)\,dx.$$

[4] (1) $r = 1 + \cos\theta$



より．

(答)



(2) 教科書 p.115 (問題5.2の4) で証明ずみの面積の表式を用いると．

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

ここで $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = \Big[\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi$$

$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot(2\pi + 2\cdot 0 + \pi) = \frac{3}{2}\pi$ (答)

(別解) $S = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} r\,dr$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=r(\theta)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 d\theta$$

以下最初に示した解答と同じ．

[4] (3)

$$I = \iint_D x \, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} dr \cdot r \quad x$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} dr \cdot r^2 \cos\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{3}(1+\cos\theta)^3$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta\right) d\theta$$

ここで
$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = \Big[\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\theta)(\sin\theta)' d\theta = \int_0^0 (1-t^2)\,dt = 0$$

$(t = \sin\theta)$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta}{4} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi + \frac{2}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot \pi = \frac{3}{4}\pi$$ (あるいは教科書p.85で導いた結果を用いる.)

$$\therefore \; I = \frac{1}{3}\cdot\left(0 + 3\cdot\pi + 3\cdot 0 + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{5}{4}\pi$$ (答)