# 微分積分 II (a クラス) 中間試験問題用紙

各人に問題用紙1枚、答案用紙1枚 (表裏使用)、計算用紙1枚を配布する。答案用紙1枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。問【1】〜【4】については解答用紙には計算の最終結果だけを記せ。問【5】〜【12】については導出過程も記せ。積分定数として断り書きなしに $c$ などの記号を用いてよい。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。配点は【1】〜【4】が各5点、【5】〜【12】が各10点、合計100点である。

**【1】** $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/3}}$ を求め、解答用紙に計算の最終結果だけを記せ。

**【2】** $I = \displaystyle\int \cos\frac{x}{3}\,dx$ を求め、解答用紙に計算の最終結果だけを記せ。

**【3】** $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ を求め、解答用紙に計算の最終結果だけを記せ。

**【4】** $I = \displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^4}}$ を求め、解答用紙に計算の最終結果だけを記せ。

**【5】** $I = \displaystyle\int \arctan x\,dx$ を求めよ。

**【6】** $I = \displaystyle\int x^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$ を求めよ。

**【7】** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(x^2\right) + c$ である。これを利用して $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x^4}}$ を求めよ。

**【8】** $f(x) = \displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2-3x}^{5+7x} e^{-t^3}\,dt$ を求めよ。

**【9】** パラメータ表示された曲線

$$x = \cos\left(t^2\right), \quad y = \sin\left(t^2\right), \quad (0 \le t \le \sqrt{\pi})$$

の弧長（長さ） $L$ を求めよ。

**【10】** $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ について以下の小問に答えよ。

(i) $I_n$ を $I_{n-1}$ を用いて表す式 (漸化式) を作れ。ただし、$n$ は1以上の整数とする。

(ii) $I_3$ を求めよ。

**【11】** $f(x) = \displaystyle\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$ として以下の小問に答えよ。

(i) 不定積分 $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(ii) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ の値を求めよ。

**【12】** $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を求めよ。

ヒント：うまい式の変形を思いつかない人は、三角関数の有理関数の万能積分法に従って $t = \tan\frac{x}{2}$ と置換してみなさい。

# 微分積分 II (a クラス) 中間試験 答案用紙

福井大学 工学部 電気・情報・物理・知能工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2008 年 12 月 16 日 1 限実施

【1】
5 点

【2】
5 点

【3】
5 点

【4】
5 点

【5】
10 点

【6】
10 点

【7】
10 点

【8】
10 点

【9】
10 点

【10】～【12】は裏面に解答せよ.(各 10 点)

| 学科 | | 学籍番号 | | | | | | | | | 氏名 | | 得点 | [1–4] | [5] | [6] | [7] | [8] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | [9] | [10] | [11] | [12] | |

微分積分II (a) 中間試験 解答・解説 (2008/12/16 実施分)

[1] $I = \int x^{-1/3}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \underline{\frac{3}{2} x^{2/3} + C}$

[2] $t = \frac{x}{3}$ とおく。$dt = \frac{1}{3}dx$。$I = \int \cos\frac{x}{3}\,dx = \int \cos t \cdot 3\,dt$

$= 3\int \cos t\,dt = 3\sin t + C = \underline{3\sin\frac{x}{3} + C}$

[3] $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ を微分公式として覚えている人は、ただちに

$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \underline{\tan x + C}$ と答えてよい。

講義した一般的な方法を適用するなら、この場合は $t = \tan x$ と置換することになる。

[4] $t = 1 + x^4$ とおくと $dt = 4x^3 dx$ なので、$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} 2\sqrt{t} + C$

$= \underline{\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + C}$

[5] $I = \int 1 \cdot \arctan x\,dx = \int (x)' \arctan x\,dx$

$= x\arctan x - \int x\,(\arctan x)'\,dx = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$

$t = 1 + x^2$ とおくと、$dt = 2x\,dx$. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\log|t| + C$

$= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$.

$\therefore \underline{I = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C}$

[6] $I = \int x^2 \sin\frac{x}{2}\,dx = \int x^2 \left(-2\cos\frac{x}{2}\right)' dx$

$= x^2 \cdot \left(-2\cos\frac{x}{2}\right) - \int (x^2)'\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) dx$ (∵部分積分法)

$= -2x^2\cos\frac{x}{2} + 4\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$

$= -2x^2\cos\frac{x}{2} + 4\int x\left(2\sin\frac{x}{2}\right)' dx$

$= -2x^2\cos\frac{x}{2} + 4\cdot x\cdot\left(2\sin\frac{x}{2}\right) - 4\int (x)'\cdot\left(2\sin\frac{x}{2}\right) dx$ (∵部分積分法)

$= -2x^2\cos\frac{x}{2} + 8x\sin\frac{x}{2} - 8\int \sin\frac{x}{2}\,dx$

$= -2x^2\cos\frac{x}{2} + 8x\sin\frac{x}{2} + 16\cos\frac{x}{2} + C$

$= \underline{2\cdot(8-x^2)\cos\frac{x}{2} + 8x\sin\frac{x}{2} + C}$

[7] $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-\{(\frac{3}{2})^{1/4}x\}^4}}$. $t = (\frac{3}{2})^{1/4} x$ とおく. $dt = (\frac{3}{2})^{1/4} dx$.

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(\frac{2}{3})^{1/4} t \, (\frac{2}{3})^{1/4} dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \arcsin t^2 + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x^2\right) + C$$

[8] $F(t) = \int e^{-t^3} dt$ とおくと、 $\frac{dF(t)}{dt} = e^{-t^3}$.

$$f(x) = \frac{d}{dx}\{ F(5+7x) - F(2-3x) \}$$

$u = 5+7x$, $v = 2-3x$ とおくと

$$f(x) = \frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx} - \frac{dF(v)}{dv}\frac{dv}{dx} = e^{-u^3} \cdot 7 - e^{-v^3} \cdot (-3)$$

$$= 7e^{-(5+7x)^3} + 3e^{-(2-3x)^3}$$

[9] $L = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{(-2t\sin t^2)^2 + (2t\cos t^2)^2}\,dt$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{4t^2\{\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2)\}}\,dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t\,dt$$

$$= [t^2]_{t=0}^{t=\sqrt{\pi}} = \pi$$

(補足) パラメータを $u = t^2$ に変更すると. $x = \cos u$, $y = \sin u$ $(0 \leq u \leq \pi)$ となる。この表示で計算しても同じ結果を得る.

[10] (i) $I_n = \int 1 \cdot (\log x)^n dx = \int (x)' \cdot (\log x)^n dx$

$$= x(\log x)^n - \int x\{(\log x)^n\}' dx$$

$$= x(\log x)^n - \int x\left\{n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}\right\} dx$$

$$= x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx$$

$$= x(\log x)^n - nI_{n-1}$$

$$\therefore\ I_n = x \cdot (\log x)^n - nI_{n-1}$$

[10] (ii) $I_0 = \int (\log x)^0 dx = \int dx = x + c.$

$I_1 = x\log x - I_0 = x\log x - x - c$

$I_2 = x(\log x)^2 - 2I_1 = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + 2c$

$I_3 = x(\log x)^3 - 3I_2 = x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x - 6C$

$\therefore\ I_3 = \underline{x\{(\log x)^3 - 3(\log x)^2 + 6\log x - 6\}} + c$ （$-6c$をcと書き直した）

[11] (i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x+1}$ とおける。

両辺に$(x+1)$を乗じてから$x=-1$を代入すると、$c = \frac{1}{2}$ が得られる。

両辺に$(x^2+1)$を乗じてから$x=i$ $(i^2=-1)$を代入すると $ai + b = \dfrac{1}{i+1}$

$= \dfrac{i-1}{(i+1)(i-1)} = \dfrac{i-1}{i^2-1^2} = \dfrac{i-1}{-1-1} = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}$ $\therefore\ a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$ が得られる

$\therefore F(x) = \int f(x)dx = \int \left( \dfrac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx$

$= -\frac{1}{2}\int \dfrac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x+1}$

$= \underline{-\frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\log|x+1| + c}$

（補足） $\int \dfrac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \dfrac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \dfrac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$

(ii) $I = \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \{F(R) - F(0)\}$

$= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{1}{4}\log(R^2+1) + \frac{1}{2}\log(R+1) + \frac{1}{2}\arctan R \right)$ $(\because F(0)=0)$

$= \lim_{R\to 0} \left\{ -\frac{1}{4}\log(R^2+1) + \frac{1}{4}\log(R+1)^2 \right\} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ $(\because \log A = \frac{1}{2}\log A^2)$

$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4}\log\dfrac{(R+1)^2}{R^2+1} + \frac{\pi}{4}$ $(\because \log A - \log B = \log\frac{A}{B})$

$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4}\log\dfrac{(1+\frac{1}{R})^2}{1+\frac{1}{R^2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\log\frac{1}{1} + \frac{\pi}{4} = \underline{\frac{\pi}{4}}$ $(\because \log 1 = 0)$

[12] $I = \int \dfrac{dx}{\cos x} = \int \dfrac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \dfrac{(\sin x)'dx}{1-\sin^2 x}.$

$t = \sin x$ とおくと、$I = \int \dfrac{dt}{1-t^2} = \int \left( \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t} \right) dt$

$= -\frac{1}{2}\log|1-t| + \frac{1}{2}\log|1+t| + C$

$= \frac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right| + C = \underline{\frac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C}$

[12]（つづき）

（別解法）$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと、$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$

$$I=\int\frac{1}{\cos x}\frac{dx}{dt}dt=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=-\log|1-t|+\log|1+t|+C=\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

最初に示した解法により得た答と等価な式であることを以下の式変形で示す

$$I=\frac{1}{2}\log\frac{(1+\tan\frac{x}{2})^2}{(1-\tan\frac{x}{2})^2}+C\qquad\left(\because\ \log|A|=\frac{1}{2}\log A^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}}+C=\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-2\tan\frac{x}{2}}+C\quad\left(\because\ 1+\tan^2A=\frac{1}{\cos^2A}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C\quad\left(\because\ \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$