$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ.（各 10/計 30 点）

(1) $\displaystyle\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2008 年 2 月 5 日	林・小野田 保倉・田嶋			

$\boxed{2}$ 座標平面上に積分領域 D を図示し (各 5/計 10 点), 2 重積分の値を計算せよ (各 5/計 10 点).

(1) $\displaystyle\iint_D (3x-y)\ dxdy$,　ただし, $D=\{(x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 1\leqq y\leqq 2\}$.

(2) $\displaystyle\iint_D x^3y\ dxdy$,　ただし, $D=\{(x,y)|\ x+y\leqq 1,\ 0\leqq x,\ 0\leqq y\}$.

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2008 年 2 月 5 日	林・小野田 保倉・田嶋			

$\boxed{3}$ $a > 0$ について, $D = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) 領域 D を座標平面上に図示せよ (5 点).

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$ について, そのヤコビアン (Jacobian) の絶対値 $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|$ の値が, r に等しいことを示せ (5 点).

(3) 次の値を求めよ (各 10/計 20 点): $I = \displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy, \quad K = \iint_D x^2\ dxdy.$

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　　　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2008 年 2 月 5 日	林・小野田 保倉・田嶋			

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ.（各 10/計 20 点）

(1) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})$ について, その微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, 座標平面上の曲線 C: $y = \dfrac{x^2}{2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さを求めよ.

科目名	試験日	出題者	学科・学年/学生コード	氏　　　　名	得　点
微分積分 II 期末試験	2008 年 2 月 5 日	林・小野田 保倉・田嶋			

1

(1) $I=\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx = \int \frac{5x-4}{(2x-3)(x+2)}dx$

$\frac{5x-4}{(2x-3)(x+2)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+2}$ (A, Bは定数) とおける。

両辺に $2x-3$ をかけて $x=\frac{3}{2}$ を代入すると $A=\frac{5\cdot\frac{3}{2}-4}{\frac{3}{2}+2}=\frac{7}{7}=1$.

両辺に $x+2$ をかけて $x=-2$ を代入すると $B=\frac{5\cdot(-2)-4}{2\cdot(-2)-3}=\frac{-14}{-7}=2$

$$\therefore I = \int\left\{\frac{1}{2x-3}+\frac{2}{x+2}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|2x-3| + 2\log|x+2| + C \quad \text{(答)}$$

$$= \log\left\{\sqrt{2x-3}\,(x+2)^2\right\} + C \quad \text{(答)}$$

(補足) $J=\int\frac{dx}{2x-3}$ の求め方: $t=2x-3$ とおくと $dt=2dx$

$$\therefore J=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\log|t|+C=\frac{1}{2}\log|2x-3|+C$$

(2) $I=\int\frac{x}{x^2+2}dx$. $t=x^2+2$ とおくと. $dt=2x\,dx$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\log|t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+2)+C \quad \text{(答)}$$

(3) $I=\int x^2\log x\,dx = \int\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3(\log x)'dx \quad (\because \text{部分積分法})$$

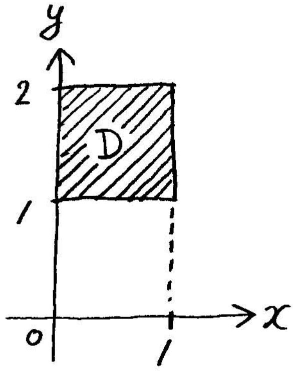
$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\int x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C=\frac{1}{9}x^3(3\log x-1)+C \quad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

(1)



$$I=\iint_D (3x-y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_1^2 dy\,(3x-y)$$

$$=\int_0^1 dx\,\left[3xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$=\int_0^1 dx\left\{(6x-2)-\left(3x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\int_0^1 dx\,\left(3x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=0 \quad (\text{答})$$

(別解)

$$I=\iint_D (3x-y)\,dxdy$$

$$=3\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_1^2 dy\right)-\left(\int_0^1 dx\right)\left(\int_1^2 y\,dy\right)$$

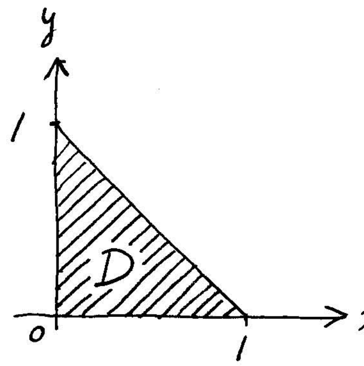
$$=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1}\left[y\right]_{y=1}^{y=2}-\left[x\right]_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1-1\cdot\frac{1}{2}\cdot 3$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=0 \quad (\text{答})$$

(2)



$$I=\iint_D x^3y\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,x^3y$$

$$=\int_0^1 dx\cdot x^3\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}$$

$$=\int_0^1 dx\cdot x^3\frac{1}{2}(1-x)^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-2x^4+x^5)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{120} \quad (\text{答})$$

(別解)

$$I=\iint_D x^3y\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\,x^3y$$

$$=\int_0^1 dy\cdot y\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1-y}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 y(1-y)^4\,dy$$

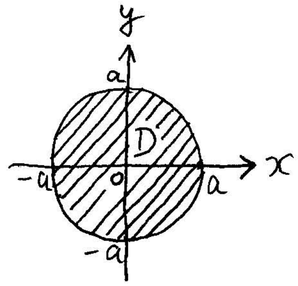
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)t^4\,dt \quad (t=1-y\text{とおく})$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{6}t^6\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{120} \quad (\text{答})$$

$\boxed{3}$

(1)



(2)
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta, & -r\sin\theta \\ \sin\theta, & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \cdot r\cos\theta - \sin\theta \cdot (-r\sin\theta)$$

$$= r \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= r$$

極座標では $r \geqq 0$ の範囲を考えるので

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = |r| = r$$ が成り立つ。

(3)
$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \cdot r \cdot e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a dr \cdot r \cdot e^{-r^2}\right) = 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=a}$$

$$= \pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$$ (答)

$$K = \iint_D x^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \cdot r \cdot (r\cos\theta)^2$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\, dr\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{4}a^4$$

$$= \frac{\pi a^4}{4}$$ (答)

$\boxed{4}$

(1) $f'(x) = \{x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})\}'$

$= (x)'\sqrt{x^2+1} + x(\sqrt{x^2+1})' + \dfrac{d\log(x+\sqrt{x^2+1})}{d(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\{(x)' + (\sqrt{x^2+1})'\}$

$= 1\cdot\sqrt{x^2+1} + x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}$

$= 2\sqrt{x^2+1}$ (答)

(補足) 無理式の簡略化の一般的方針としては、$\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ を、以下のような計算により $-x+\sqrt{x^2+1}$ に直す「分母の有理化」を行うのが常道である。

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x+\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{-x+\sqrt{x^2+1}}{-x^2+(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{-x+\sqrt{x^2+1}}{-x^2+x^2+1} = -x+\sqrt{x^2+1}.$$

しかし、この問題の場合は、この手続きなしで、うまく分母と分子が相殺してくれる。なぜうまくいくかと言えば、$2\sqrt{x^2+1}$ という簡単な式を積分して作ったものが $f(x)$ だからである。(即ち、相殺するように問題を作ったわけです。)

(2) (求める長さ) $= \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})\}\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2}\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\} - \dfrac{1}{2}\{0 + \underbrace{\log 1}_{=0}\}$

$= \dfrac{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})}{2}$ (答)

(補足) 小数で表すと、約 1.148 になります。
答案の中に、グラフをていねいに描いた上で「グラフより約1」という答がありましたが、数学の答案としてはともかく、主張の内容は正しいと言えます。工学部生としては、むしろ頼もしいかも。