福井大学工学部 (電気電子・物理) 工学科 1 年生対象、田嶋教員担当、2007 年 12 月 18 日 1 限実施

微分積分 II (C2) 中間試験問題用紙

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。配点は、【1】〜【4】が各 5 点、【5】〜【14】が各 8 点、合計 100 点である。

【1】 $I = \displaystyle\int x\, e^x\, dx$ を求めよ。

【2】 $I = \displaystyle\int_1^2 x^2\, e^{-x^3}\, dx$ を求めよ。

【3】 $I = \displaystyle\int \sin^6 x\, \cos x\, dx$ を求めよ。

【4】 $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ を求めよ。

【5】 $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\, dx$ を求めよ。

【6】 $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\, dx$ を求めよ。

【7】 $I = \displaystyle\int \arcsin x\, dx$ を求めよ。

【8】 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2\, \cos\, x\, dx$ を求めよ。

【9】 $I' = \displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^4}\, dt$ を求めよ。

【10】 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(1+\cos^2 x+\cos^4 x\right)\, dx$ を求めよ。
ただし教科書で証明済みの下記の定積分公式を利用してよい。

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ は偶数})$$

【11】 $I = \displaystyle\int \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+1)} dx$ を求めよ。

【12】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ を求めよ。(ヒント： $t = x+\sqrt{1+x+x^2}$ とおいて置換積分するとよい。)

【13】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$ を求めよ。(ヒント： $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置いて置換積分するとよい。)

【14】 広義積分 $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ が存在する (有限の値を持つ) のは、定数 α がどのような範囲にある場合かを論ぜよ。また、その場合の積分値を求めよ。

微分積分 II (C2) 中間試験 答案用紙

福井大学 工学部 (電気電子・物理) 工学科 1 年生対象、 田嶋教員担当、 2007 年 12 月 18 日 1 限実施

【1】
5 点

【2】
5 点

【3】
5 点

【4】
5 点

【5】
8 点

【6】
8 点

【7】
8 点

【8】
8 点

【9】
8 点

【10】
8 点

【11】〜【14】は裏面に解答せよ.(各 8 点)

学科		学籍番号									氏名		得点	

[1–4] [5, 6] [7, 8] [9, 10]
[11] [12] [13] [14]

微分積分II (c2) 中間試験 (2007年12月18日実施) の解答・解説

[1] $I=\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int x' e^x dx = x e^x - \int e^x dx$
$= x e^x - e^x + C = (x-1) e^x + C$ (答)

[2] $I=\int_1^2 x^2 e^{-x^3} dx = \int_1^2 \frac{1}{3}(x^3)' e^{-x^3} dx$ なので $t=x^3$ とおけばよい。
$dt = 3x^2 dx$, $1 \leqq x \leqq 2$ は $1 \leqq t \leqq 8$ に対応する.
$I = \frac{1}{3}\int_1^8 e^{-t} dt = \frac{1}{3}\left[-e^{-t}\right]_{t=1}^{t=8} = \frac{e^{-1}-e^{-8}}{3}$ (答)

[3] $I = \int \sin^6 x \cos x \, dx = \int \sin^6 x (\sin x)' dx$ なので $t=\sin x$ とおけばよい。 $dt = \cos x \, dx$. $I = \int t^6 dt = \frac{1}{7}t^7 + C$
$= \frac{1}{7}\sin^7 x + C$ (答)

[4] $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ (答)
公式として覚えていればよい。導出したければ $x = \sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ とおけばよい。

[5] $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\, d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}}$ なので, $t = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ とおくと
$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin t + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x + C$ (答)

[6] $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x^2}}$. $t = 2-3x^2$ とおくと, $dt = -6x\,dx$.
$\therefore I = -\frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{6} 2\sqrt{t} + C = -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3} + C$ (答)

[7] $I = \int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = \int x' \cdot \arcsin x \, dx$
$= x \arcsin x - \int x (\arcsin x)' dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
$t = 1-x^2$ とおくと. $dt = -2x\,dx$.
$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$
$\therefore I = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C'$ (答) ($C' = -C$ と書いた)

[8] $I = \int_0^{\pi/4} x^2 \cos x\, dx = \int_0^{\pi/4} x^2 (\sin x)' dx$

$= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (x^2)' \sin x\, dx = \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} - 2\int_0^{\pi/4} x \sin x\, dx.$

$\int_0^{\pi/4} x \sin x\, dx = \int_0^{\pi/4} x(-\cos x)' dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x'(-\cos x)\, dx$

$= -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \int_0^{\pi/4} \cos x\, dx.$

$\int_0^{\pi/4} \cos x\, dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore I = \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} - 2\left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16\sqrt{2}}$ (答)

[9] $F(t) = \int e^{-t^4} dt$ とおくと. $I = \int_0^x e^{-t^4} dt = F(x) - F(0)$

$F'(t) = e^{-t^4}$ であるから. $I' = \frac{dF(x)}{dx} - 0 = F'(x) = e^{-x^4}$ (答)

[10] $t = \pi - x$ とおくと. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^n x\, dx = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n(\pi - t)(-dt)$

$= \int_0^{\pi/2} (-1)^n \cos^n t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$ (但し n は偶数とする)

$\therefore I = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 x + \cos^4 x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos^2 x + \cos^4 x)\, dx$

$= 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 x + \cos^4 x)\, dx$

$\int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1 \cdot \pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$,

$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$

$\therefore I = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}\right) = \frac{15}{8}\pi$ (答)

[11] $\frac{2x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$ とおくと.

$2x^2 + 3x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$

$\therefore A + B = 2$, $C - B = 3$, $A - C = -1$

$\therefore A = 2$, $B = 0$, $C = 3$

$I = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 2\log|x-1| + 3\arctan x + C$ (答)

[12] $t-x=\sqrt{1+x+x^2}$, $t^2-2tx+x^2=1+x+x^2$, $t^2-1=(2t+1)x$

$\therefore\ x=\dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $\sqrt{1+x+x^2}=t-x=t-\dfrac{t^2-1}{2t+1}=\dfrac{t^2+t+1}{2t+1}$,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2t+1)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+1)^2}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2} ,$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt=\int\frac{dt}{t+\frac{1}{2}}$$

$$=\log\left|t+\tfrac{1}{2}\right|+C=\log\left|x+\sqrt{1+x+x^2}+\tfrac{1}{2}\right|+C\ (答)$$

[13] $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$,

$$I=\int\frac{dx}{3+\cos x}=\int\frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\ \frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{2+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{2}\ d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C\quad(答)$$

[14] $\alpha=1$ のとき $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_1^{\varepsilon}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\log x\right]_1^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\log\varepsilon=\infty$.

$\alpha\neq 1$ のとき $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_1^{\varepsilon}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_1^{\varepsilon}$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon^{1-\alpha}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (1-\alpha<0)\\[2ex] \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\infty & (1-\alpha>0)\end{cases}$$

$\therefore$ I は $\alpha>1$ のとき存在し、値は $I=\dfrac{1}{\alpha-1}$ である。(答)

問題	配点
[1〜4]	20
[5,6]	16
[7,8]	16
[9,10]	16
[11]	8
[12]	8
[13]	8
[14]	8
合計	100

補足説明

[7] の別解。

$t = \arcsin x$ とおく。$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos t \geqq 0$ である。

$x = \sin t$,　$\cos t = +\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$.

$dx = \cos t\, dt$

$$\therefore\ I = \int \arcsin x\, dx = \int t \cos t\, dt$$

$$= t \sin t - \int \sin t\, dt = t \sin t + \cos t + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad (\text{答})$$

[8] まず $x^2 \cos x$ の不定積分を求めてから、一気に定積分を計算してもよい。

$$I = \int_0^{\pi/4} x^2 \cos x\, dx = \Big[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\Big]_0^{\pi/4} = \cdots\cdots$$

[11] $\displaystyle\int \frac{3\, dx}{x^2+1} \overset{(\text{誤})}{=} 3 \log (x^2+1) + C$ 　という誤りが多く見られました。

[12] 以下のような誤りが数列見られました。

誤答例

$t^2 - 2tx = x + 1$

両辺を微分して

$2t\, dt - 2x\, dt \overset{(\text{誤})}{=} dx$

正しくは、最後の等式が、

$$2t\, dt - 2x\, dt \underbrace{- 2t\, dx}_{\text{この項を忘れている}} \overset{(\text{正})}{=} dx$$

です。

このあとは　$2(t-x)\, dt = (2t+1)\, dx$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = \frac{2(t-x)}{2t+1} = \frac{2\left(t - \frac{t^2-1}{2t+1}\right)}{2t+1}$$

$$= \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$$

となり、以下、解答と同じことになります。