微分積分 II (C2 クラス) 小テスト 問題　　(2007 年 10 月 30 日実施、担当教員 田嶋)

【1】 $I = \int \sin^3 x \cos x \, dx$ を求めよ。

【2】 $I = \int x \sin x \, dx$ を求めよ。

【3】 $I = \int \frac{4}{\sqrt{2-3x^2}} \, dx$ を求めよ。

【4】 $\cos\left(2\sqrt{x}\right)$ を微分せよ。

配点は各問２点 (軽微なミスによる間違いには部分点１点を与える)、合計８点満点です。

微分積分 II 小テスト 解答・解説　　　(担当教員 田嶋)

この小テストでは、微分積分法の基礎的な計算力の有無を調べました。分からなかった問題は、以下の解説を読んで必ず理解しておきましょう。

【1】 問 $I = \int \sin^3 x \cos x dx$ を求めよ。

答 $t = \sin x$ と置くと、$dt = \cos x dx$。$\therefore\ I = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$. ($C$ は積分定数)

◆ 置換積分法の典型的な適用例です。キーポイントは $\cos x dx = d(\sin x)$ に気づくことですが、積分の経験を十分に積めば自然にこのキーポイントに気がつくようになるでしょう。

◆ $t = \cos x$、$t = \sin^3 x$ などの他の置換法でも、それなりの式の変形をすれば紆余曲折の末に答までたどりつけないことはありませんが、やはり、解答に示した簡明な方法を思い付くようになって欲しいと思います。

◆ 以下の通り、部分積分法でも求めることができます。(ただし能率のよい方法とは言えません。)

$$I = \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \sin^3 x \sin x - \int (\sin^3 x)' \sin x dx$$
$$= \sin^4 x - \int (3\sin^2 x \cos x)\sin x dx = \sin^4 x - 3\int \sin^3 x \cos x dx = \sin^4 x - 3I + C.$$
$$\therefore 4I = \sin^4 x + C,\ I = \frac{1}{4}\sin^4 x + C'\ (C, C' \text{ は積分定数}).$$

【2】 問 $I = \int x \sin x dx$ を求めよ。

答 部分積分法を用いると, $I = \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int x'(-\cos x) dx$
$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$ (C は積分定数).

◆ 一つの積分に対する部分積分の適用の仕方は一通りではありません。例えば、次のような変形を最初に思い付く人もいるでしょう。

$$I = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \sin x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \int \frac{1}{2}x^2 (\sin x)' dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x dx$$

この変形は誤りではありませんが、不定積分を求めるという役には立ちません。一般的に言って、積分では答につながるような変形の仕方を試行錯誤して探すことが必要です。微分のように計算の道筋が一本に決まっているわけではないのです。

◆ 積分は 被積分関数を $\int$ と dx とではさんで表しますが、式の変形をする途中で dx を省略してしまう人をときどき見掛けます。これは正しい書き方ではありません。

【3】 問 $I = \int \frac{4}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx$ を求めよ。

答 積分公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ (C は積分定数) に帰着させる。

$$I = \frac{4}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}} d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x + C.$$

◆ 既知の積分公式にあてはめて解く問題です。例えば $\int \sin x dx = -\cos x + C$ を知っていれば、

$\sin 2x$ や $\sin(x+1)$ の不定積分は容易に求めることができますが、その $\cos x$ に対応するものが、この問では arcsin$x$ なのです。

◆ この種の不定積分を出題すると、$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\text{項}) \cdot \log \sqrt{1-x^2}$ のような形の誤答が必ず出ます。これは $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ に無理に関係付けようとした結果なのでしょう。即ち、$\displaystyle J = \int \frac{dx}{f(x)}$ を求めるために $t = f(x)$ とおいて置換積分してみると、$\displaystyle J = \int \frac{1}{t}\frac{dx}{dt}dt$ となります。ここまでは正しい変形ですが、このあと (置換積分法がしっかり理解できていないために) $\dfrac{dx}{dt}$ を誤って積分の外に出してしまうと、$\displaystyle J \overset{\text{誤}}{=} \frac{dx}{dt}\int \frac{dt}{t} \overset{\text{正}}{=} \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^{-1} \{\log|f(x)| + C\}$ というような誤答になるのです。

◆ 式の変形の途中でささいなミスをしたため答を間違えることは、誰にでもありえることです。しかし、不定積分を求める問題に限っては、得られた結果を微分して被積分関数に一致することを確かめることで、そのようなミスに自分で気づくことができますから、計算ミスは全くしないという意気込みで取り組みましょう。

◆ 最低限覚えておくべき「基本的な関数の微分」を下記にまとめておきます。

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

上段が高校レベルの基本的な関数、下段の二つが大学で新たに覚えるべきものです。ついでに $(\tan x)' = \cos^{-2} x$ も覚えておくと積分で役立つことがあるでしょう。また、下記の積分については「教科書に求め方と答が載っている」ということを覚えておくと後々役に立つでしょう。

$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \qquad \int \sqrt{x^2 \pm 1}dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}dx.$$

【4】 $\boxed{\text{問}}$ $\cos\left(2\sqrt{x}\right)$ を微分せよ。

$\boxed{\text{答}}$ $y = \cos\left(2\sqrt{x}\right)$ と書く。$t = 2x^{1/2}$ とおけば、$y = \cos t$ である。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos t}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{\sin\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}.$$

◆ 合成関数の微分法の問題です。微分は積分とは異なり、計算の道筋は一本道であり、どちらに行くべきか迷うような別れ道はありません。どのような複雑な関数も、その関数の構成のされ方に従って合成関数の微分法を適用していくことで、必ず微分できます。

◆ 置換積分法の基礎は、合成関数の微分法にあります。合成関数の微分法がよくわからないのに、置換積分ができるようになったとしても、そのような基礎を欠いた理解の仕方は、効率がきわめて悪く応用のほとんど効かないものになるでしょう。是非、まず合成関数の微分法を完全に理解してください。

配点は各問２点 (軽微なミスによる間違いには部分点１点を与える)、合計８点満点です。