福井大学工学部１年生対象、担当教員 田嶋、2007 年度後期用

微分積分 II 教科書 ４章 (積分法) の範囲の自宅学習用問題

解答に際しては、最終的な答だけでなく導出過程も記せ。なお、教科書では $\arcsin x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}x$、$\arccos x$ を $\mathrm{Cos}^{-1}x$、$\arctan x$ を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と表記している。

【1】 $I = \displaystyle\int \sin^3 x\, dx$ を求めよ。(5 点)

【2】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ を求めよ。(5 点)

【3】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ。(10 点)

【4】 $I = \displaystyle\int_0^2 x^2 e^{2x} dx$ を求めよ。(10 点)

【5】 $I' = \displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{2x} t f(t) dt$ を求めよ。(10 点)

【6】 $I = \displaystyle\int \frac{x-1}{(2-x)^3} dx$ を求めよ。(10 点)

【7】 $I = \displaystyle\int \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ を求めよ。(10 点)

【8】 $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$ を求めよ。(10 点)

【9】 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4} dx$ を求めよ。(10 点)

【10】 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2\arctan\sqrt{x-1} + c$ である。これを不定積分の公式として利用して、$I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-3}}$ を求めよ。(10 点)

【11】 極座標表示された曲線

$$r = 1 + \cos\theta \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$

のグラフを描け。(5 点)

【12】 極座標表示された曲線

$$r = 1 + \cos\theta \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$

の長さ L を求めよ。(5 点)

解答

[1] $I=\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$. $t=\cos x$ とおくと $dt=-\sin x\,dx$

$\therefore\ I=\int (1-t^2)(-dt) = \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

[2] $I=\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1) + C$

[3] $I=\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{1}{\log x}(\log x)'\,dx$. $t=\log x$ とおくと $dt=(\log x)'dx$

$\therefore\ I=\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log|\log x| + C$

[4] $I=\int_0^2 x^2 e^{2x}dx = \left[x^2 \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 - \int_0^2 2x\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$= 2e^4 - \int_0^2 x e^{2x}dx = 2e^4 - \left[x\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x}dx$

$= 2e^4 - e^4 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = e^4 + \frac{1}{4}(e^4 - e^0) = \frac{5}{4}e^4 - \frac{1}{4}$

[5] $I' = \frac{d}{dx}\int_x^{2x} t f(t)\,dt$. $F(t)=\int t f(t)\,dt$ とおくと $F'(t)=tf(t)$

$I' = \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_{t=x}^{t=2x} = \frac{d}{dx}F(2x) - \frac{d}{dx}F(x) = \left\{\frac{d}{d(2x)}F(2x)\right\}\cdot\frac{d(2x)}{dx} - \frac{d}{dx}F(x)$

$= F'(2x)\cdot 2 - F'(x) = 2\cdot 2x f(2x) - x f(x) = 4x f(2x) - x f(x)$

[6] $I=\int \frac{x-1}{(2-x)^3}dx = \int \frac{-(2-x)+1}{(2-x)^3}dx = -\int\frac{dx}{(2-x)^2} + \int\frac{dx}{(2-x)^3}$

$= -\frac{1}{-1}\frac{1}{2-x}(-1) + \frac{1}{-2}\frac{1}{(2-x)^2}(-1) + C$

$= -\frac{1}{2-x} + \frac{\frac{1}{2}}{(2-x)^2} + C = \frac{-2+x+\frac{1}{2}}{(2-x)^2} + C = \frac{x-\frac{3}{2}}{(2-x)^2} + C$

[7] $I=\int \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. $t=\sqrt{x}$ とおくと $t^2=x$. $2t\,dt=dx$

$I=\int \frac{t^2 t}{1+t}2t\,dt = 2\int \frac{t^4}{1+t}dt =$

$$
\begin{array}{r}
t^3 - t^2 + t - 1 \\
t+1 \,\big)\, t^4 \\
\underline{t^4 + t^3} \\
-t^3 \\
\underline{-t^3 - t^2} \\
t^2 \\
\underline{t^2 + t} \\
-t \\
\underline{-t - 1} \\
1
\end{array}
$$

$\therefore \dfrac{t^4}{t+1} = t^3 - t^2 + t - 1 + \dfrac{1}{t+1}$

$$I = 2\int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + \log|t+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x} + 2\log(\sqrt{x}+1) + C$$

[8] $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$, $\left.\begin{array}{l} u = 1-x \\ v = x-1 \end{array}\right\}$ とおくと

$$= \int_1^0 \frac{-du}{\sqrt{u}} + \int_0^2 \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} + \int_0^2 \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

$$= \Big[2\sqrt{u}\Big]_{u=0}^{u=1} + \Big[2\sqrt{v}\Big]_{v=0}^{v=2} = 2\sqrt{1} - 0 + 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2} + 2$$

[9] $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx$, $t = x^2$ とおくと $dt = 2x\,dx$

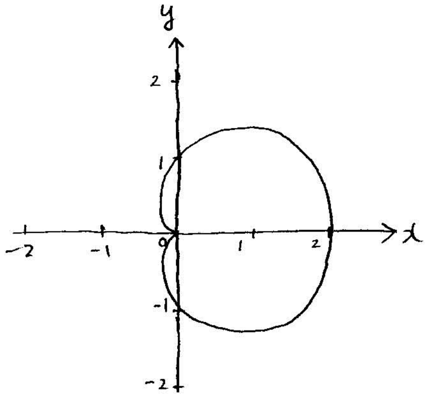
$$\therefore I = \int_{\infty}^{0} \frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\frac{\pi}{4}$$

[10] $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{2}{3}x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{2}{3}x\right)}{\left(\frac{2}{3}x\right)\sqrt{\frac{2}{3}x - 1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2\arctan\sqrt{\frac{2}{3}x - 1} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{2x-3}{3}} + C$$

[11]



[12] $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8$$